



INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

CENTRO DE ESTUDIOS CIENTÍFICOS Y TECNOLÓGICOS No.11

"WILFRIDO MASSIEU"

ACADEMIA DE MATEMÁTICAS

UNIDAD DE APRENDIZAJE DE CÁLCULO DIFERENCIAL

GUÍA DE APRENDIZAJE DE CÁLCULO DIFERENCIAL

JULIO 2011

COMPETENCIA GENERAL

Resuelve problemas relacionados con la variación de funciones, a partir del concepto de la derivada, en situaciones teóricas y reales de su entorno académico social y global.

Unidad 1: Funciones, Límites y Continuidad
Competencia particular 1: Resuelve problemas de funciones, en el campo de los números reales, que involucren los conceptos de límite y continuidad en situaciones relacionadas con su entorno académico.

RAP 1
ESTABLECE EL COMPORTAMIENTO DE LAS FUNCIONES, A TRAVÉS DE SU GRÁFICA Y SUS OPERACIONES.

FUNCIONES

DEFINICIÓN DE FUNCIÓN:

Una función f es una regla de correspondencia que asocia a cada objeto x en un conjunto –denominado **dominio**- un solo valor $f(x)$ de un segundo conjunto. El conjunto de todos los valores así obtenidos se denomina **rango** de la función.

La función se puede representar de tres formas:

a) Expresión algebraica
b) Tabla
c) Gráfica

EJEMPLO1:

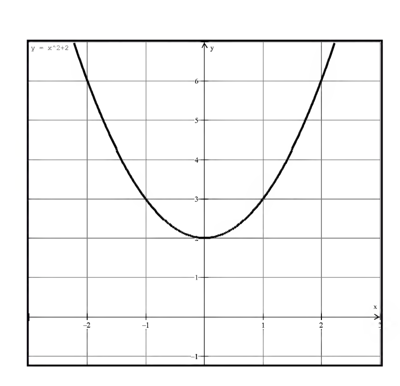
EXPRESIÓN ALGEBRAICA

$y = x^2 + 2$

TABLA

x	$y = x^2 + 2$	(x, y)
-2	$y = (-2)^2 + 2 =$ 6	$(-2, 6)$
-1	$y = (-1)^2 + 2 =$ 3	$(-1, 3)$
0	$y = (0)^2 + 2 =$ 2	$(0, 2)$
1	$y = 1^2 + 2 =$ 3	$(1, 3)$
2	$y = 2^2 + 2 =$ 6	$(2, 6)$

GRÁFICA



Esta expresión algebraica sí es una función ya que como se puede observar tanto en la tabla como en la gráfica a cada valor del dominio (cada valor de x) le corresponde, se asocia o se relaciona con solamente un valor del rango (valor de y).

EJEMPLO 2:

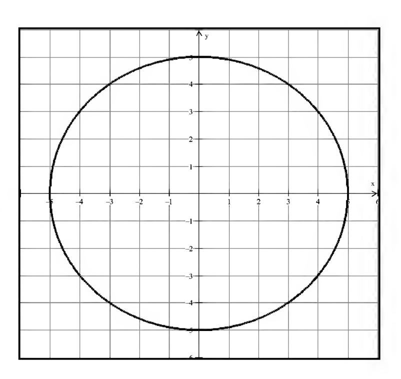
EXPRESIÓN ALGEBRAICA	TABLA	GRÁFICA

$x^2 + y^2 = 25$

Despejando a y

$y = \pm\sqrt{25 - x^2}$

x	$y = \pm\sqrt{25 - x^2}$	(x, y)
-2	$y = \pm\sqrt{25 - (-2)^2} = \pm\sqrt{21}$	$(-2, \pm\sqrt{2})$
-1	$y = \pm\sqrt{25 - (-1)^2} = \pm\sqrt{24}$	$(-1, \pm\sqrt{24})$
0	$y = \pm\sqrt{25 - 0^2} = \pm 5$	$(0, \pm 5)$
1	$y = \pm\sqrt{25 - 1^2} = \pm\sqrt{24}$	$(1, \pm\sqrt{24})$
2	$y = \pm\sqrt{25 - 2^2} = \pm\sqrt{21}$	$(2, \sqrt{21})$



Esta expresión algebraica no es función ya que tanto en la gráfica como en la tabla se observa que a cada valor del dominio (valor de x) le corresponden, dos valores del rango (valores de y).

EJERCICIOS:

I.DADAS LAS SIGUIENTES EXPRESIONES ALGEBRAICAS; GRÁFICAR Y EXPLICAR SI SON FUNCIÓN.

1.- $y = 2 + \sqrt{x^2 - 9}$

2.- $y = -5x + 3$

3.- $y = 4 - \sqrt{x + 3}$

4.- $y = \sqrt{x + 5}$

5.- $y = 2 - \sqrt{16 - x^2}$

6.- $x^2 - (y - 3)^2 = 16$

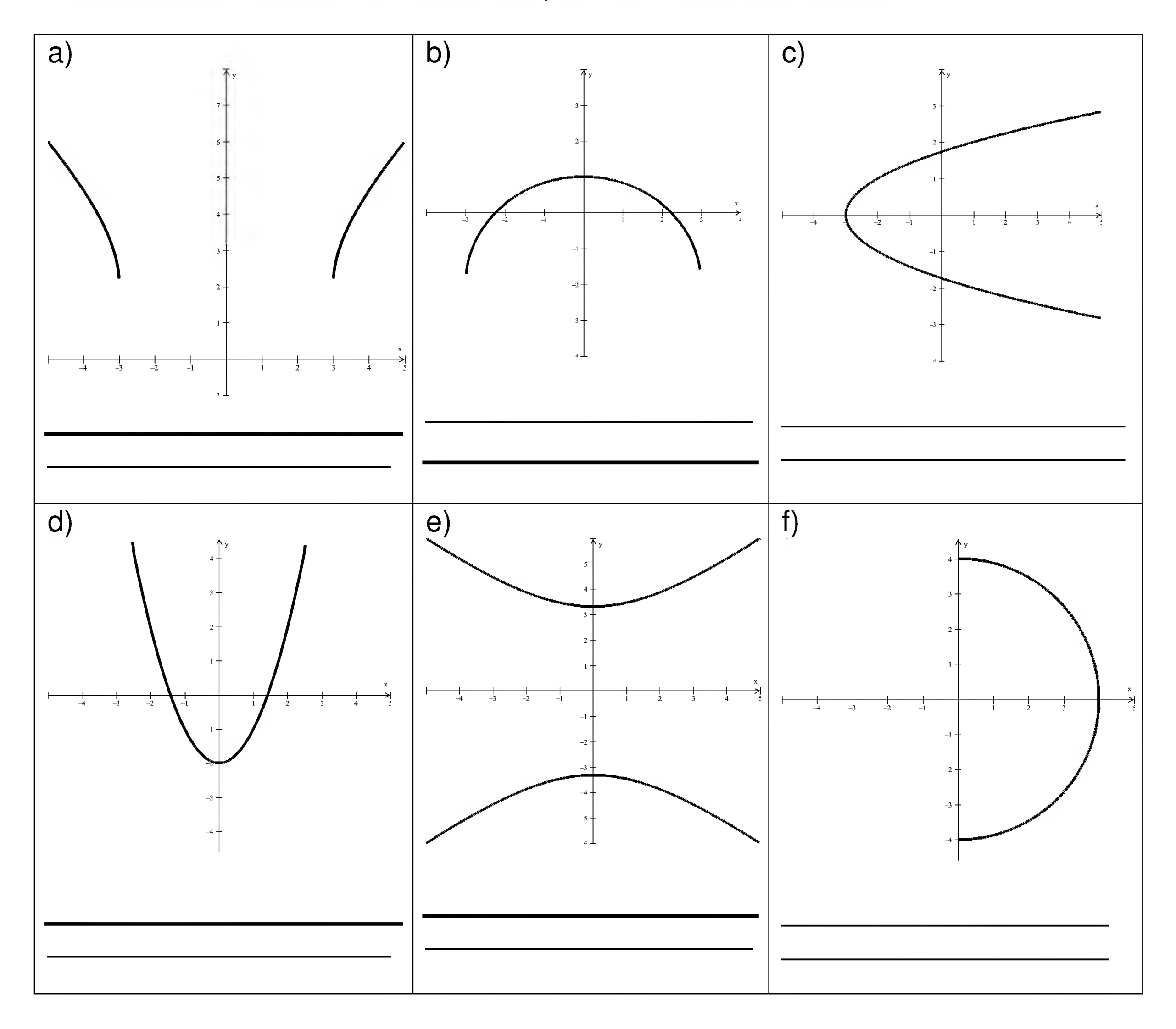
II.EN LOS SIGUIENTES ENUNCIADOS, ENCONTRAR UNA EXPRESIÓN ALGEBRAICA E INDICAR SI ES FUNCIÓN.

1.-Se va a construir una caja abierta con una pieza cuadrada de material de 12cm de lado, cortando cuadrados iguales de sus esquinas y doblando las pestañas sobrantes. Expresar el volumen en función de la longitud de los cuadraditos.

2.-Se tienen 400m de cerca para limitar un terreno rectangular que colinda a un tramo de un río, que no tendrá cerca. Determinar la función área del rectángulo en función de la longitud del lado que colinda con el río.

3.-Encontrar una función que defina el volumen de un cilindro circular recto, inscrito en un cono circular recto con un radio de 5m y una altura de 12m, en función únicamente del radio.

III.OBSERVANDO LAS SIGUIENTES GRÁFICAS, EXPLIQUE SÍ SON UNA FUNCIÓN



NOTACIÓN DE FUNCIÓN: Una sola letra como $f(o\ g\ o\ h)$ se utiliza para nombrar una función, seguida de otra letra entre paréntesis. Entonces $f(x)$, que se lee "f de x", denota el valor de la función cuando se le asigna un valor de que x. Es decir el valor de y cuando se le asigna un valor de x. Luego entonces se puede decir que:

$$y = f(x)$$

Por lo tanto, si $f(x) = x^3 - 4$, calculando para algunos valores se tiene:

$$f(2) = 2^3 - 4 = 4$$
$$f(a) = a^3 - 4$$
$$f(a + h) = (a + h)^3 - 4$$
$$f(a + h) = a^3 + 3a^2h + 3ah^2 + h^3 - 4$$

EJERCICIOS:

1.-Determina el valor de la función para $\boldsymbol{x = 1}$, $\boldsymbol{x = -1}$, $\boldsymbol{x = 0}$ $\boldsymbol{y}$ $\boldsymbol{x = -5}$ en las siguientes funciones:

a) $f(x) = 2x + 1$ $\quad sol: 3, -1,\ 1,\ -9$
b) $f(x) = \frac{1}{x}$ $\quad sol: 2,\ 0,\ -1,\ 44$
c) $f(x) = 3x^2$ $\quad sol: 3,\ 3,\ 75$
d) $f(x) = \frac{3}{2x-1}$ $\quad sol: 3, -1, -3,\ -\frac{3}{11}$
e) $f(x) = \sqrt{1 - x}$ $\quad sol: 0,\ \sqrt{2},\ 1,\ \sqrt{6}$

2.- Para $f(x) = x^2 - 2x$ determine y simplifique.

a) $f(4)$ $\quad sol: 8$
b) $f(4 + h)$ $\quad sol: 8 + 6h + h^2$
c) $f(4 + h) - f(4)$ $\quad sol: 6h + h^2$
d) $[f(4 + h) - f(4)]/\ h$ $\quad sol: 6 + h$

3.- Dada la función $f(x) = \frac{4}{x+1} + 3x$, ¿Cuál es el resultado de la operación $\frac{f(3)}{f(1)} - f(0)$? $\quad sol: -2$

4.- Para $f(x) = 1 - x^2$, determine cada valor.

a) $f(1)$ $\quad sol: 0$
b) $f(-2)$ $\quad sol: -3$
c) $f(0)$ $\quad sol: 1$
d) $f(k)$ $\quad sol: 1 - k^2$
e) $f(-5)$ $\quad sol: -24$

f) $f\left(\frac{1}{4}\right)$ $sol: \frac{15}{16}$

g) $f(1+h)$ $sol: -2h - h^2$

h) $f(1+h) - f(1)$ $sol: -2h - h^2$

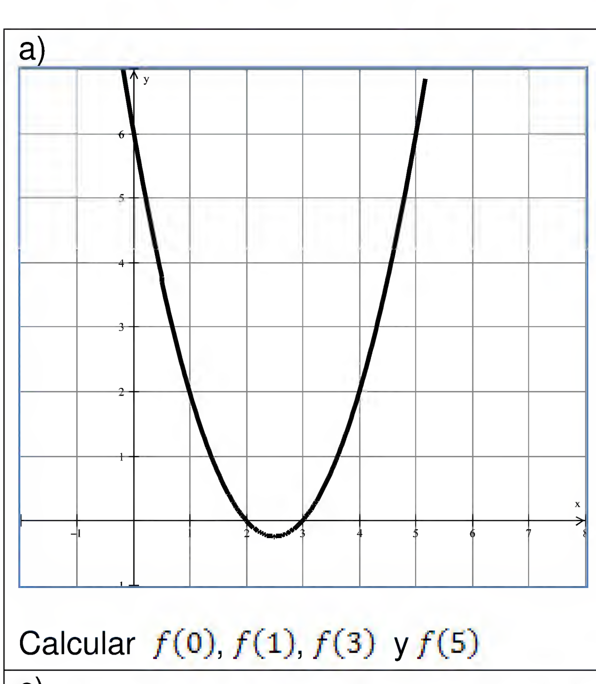
i) $f(2+h) - f(2)$ $sol: -4h - h^2$

5.- Dada la función $f(x) = 2x^2 + 3x + 4$. ¿Cuál es el resultado de $\frac{f(1)-f\left(\frac{1}{2}\right)}{f(0)}$?

$sol: \frac{3}{4}$

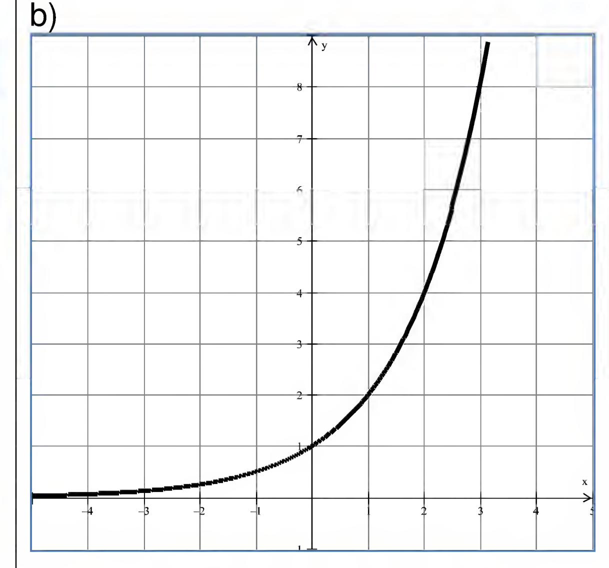
6.-Observar las siguientes gráficas y calcular lo que se indica:

a)



Calcular $f(0)$, $f(1)$, $f(3)$ y $f(5)$

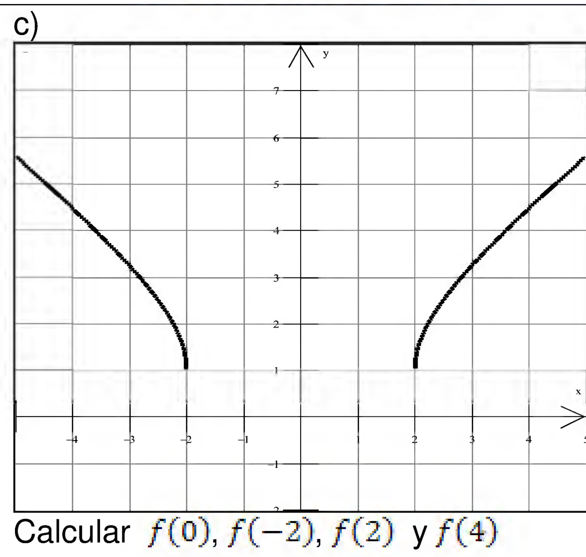
b)





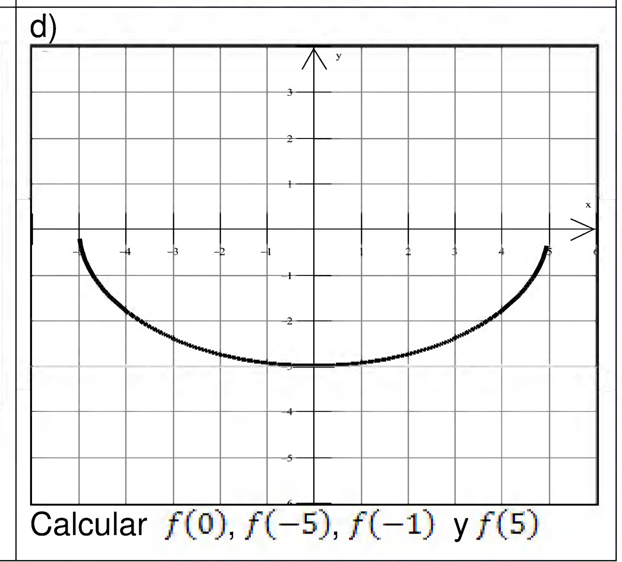
Calcular $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$ y $f(4)$

c)



Calcular $f(0)$, $f(-2)$, $f(2)$ y $f(4)$

d)



Calcular $f(0)$, $f(-5)$, $f(-1)$ y $f(5)$

INTERVALOS

Varias clases de intervalos surgirán en cálculo, para los cuales se introduce una terminología y notación especial. La desigualdad $a < x < b$, describe un **intervalo abierto** que consiste en todos los números entre a y b, pero que no incluye los puntos extremos a y b. Lo denotamos por medio del símbolo (a, b). En contraste, la desigualdad $a \leq x \leq b$ describe el **intervalo cerrado**, que incluye los extremos a y b. Se denota como $[a, b]$. La siguiente tabla muestra una variedad de intervalos y su notación.

NOTACIÓN DE CONJUNTOS	NOTACIÓN DE INTERVALOS
$\{x: a < x < b\}$	(a, b)
$\{x: a \leq x \leq b\}$	$[a, b]$
$\{x: a \leq x < b\}$	$[a, b)$
$\{x: a < x \leq b\}$	$(a, b]$
$\{x: x \leq b\}$	$(-\infty, b]$
$\{x: x < b\}$	$(-\infty, b)$
$\{x: x \geq a\}$	$[a, \infty)$
$\{x: x > a\}$	(a, ∞)
$\mathbb{R}$	$(-\infty, \infty)$

EJERCICIO:

DADA LAS SIGUIENTES FUNCIONES DETERMINAR GRÁFICA, DOMINIO Y RANGO DE CADA UNA, RESPETANDO LOS INTERVALOS:

$a)\ f(x) = x - 5$

$b)\ f(x) = |x|$

$c)\ f(x) = \sqrt{x-3}$

$d)\ f(x) = \sqrt{25-x^2}$

$e)\ f(x) = -\sqrt{25-x^2} + 3$

$f)\ f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$

$g)\ f(x) = \sqrt{x^2 - 9} - 4$

$$h)\ f(x) = \begin{cases} x & si\ x < 0 \\ x^2, & si\ 0 \le x \le 1 \\ 2 - x & si\ \ x > 1 \end{cases}$$

$$i)\ f(x) = \begin{cases} x^2, & si\ x < 0 \\ -x, & si\ 0 \le x \le 1 \\ x - 2, & si\ x > 1 \end{cases}$$

$$j)\ g(x) = \begin{cases} -x^2 + 4, & si\ x \le 1 \\ 3x, & si\ x > 1 \end{cases}$$

$$k)\ h(x) = \begin{cases} 1, & si\ x \le 0 \\ x + 1, & si\ 0 < x < 2 \\ x^2 - 1, & si\ x \ge 2 \end{cases}$$

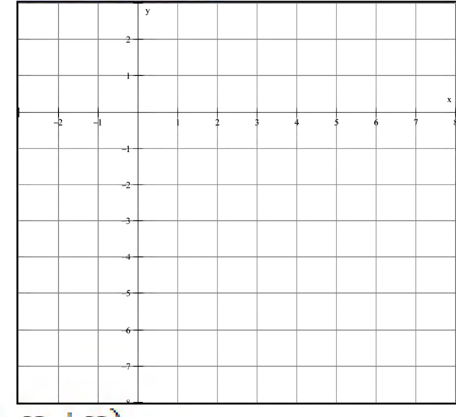
$l)\ \ h(x) = |2x + 5|$

m) $g(x) = \frac{2}{x-1}$

n) $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$

SOLUCIÓN

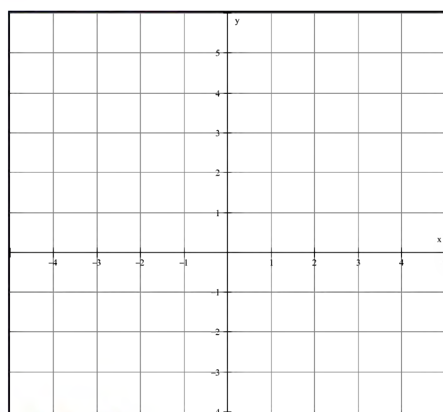
$a)\ f(x) = x - 5$



$Df(-\infty, +\infty)$

$Rf(-\infty, +\infty)$

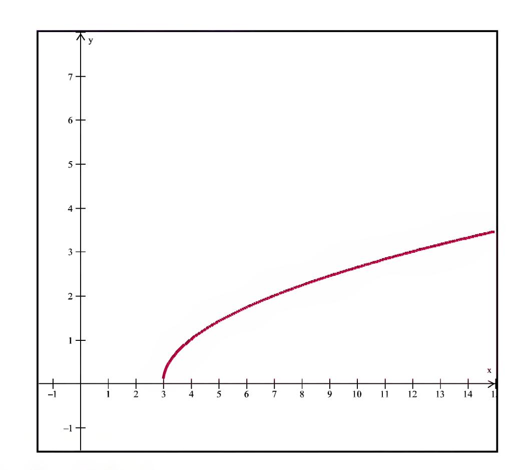
$b)\ f(x) = |x|$



$Df(-\infty, +\infty)$

$Rf(0, +\infty)$

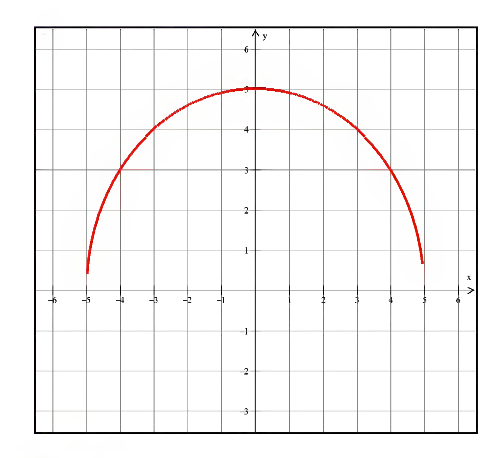
$c)\ f(x) = \sqrt{x-3}$



$Df(3, +\infty)$

$Rf(0, +\infty)$

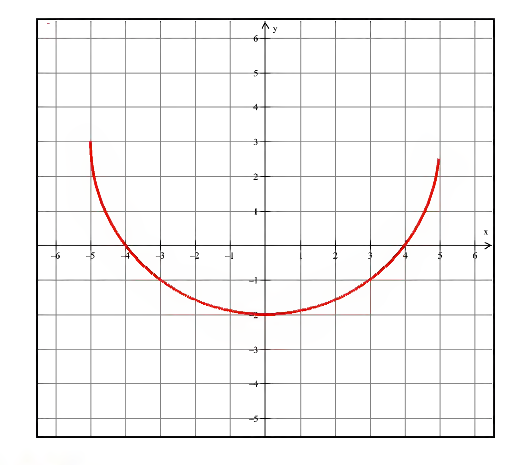
$d)\ f(x) = \sqrt{25 - x^2}$



$Df(-5, +5)$

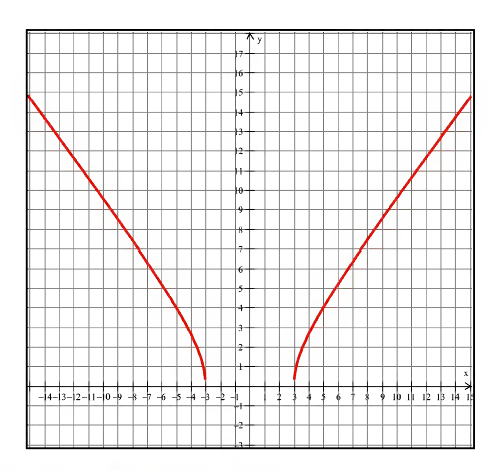
$Rf(0,5)$

$e) \ f(x) = -\sqrt{25 - x^2} + 3$



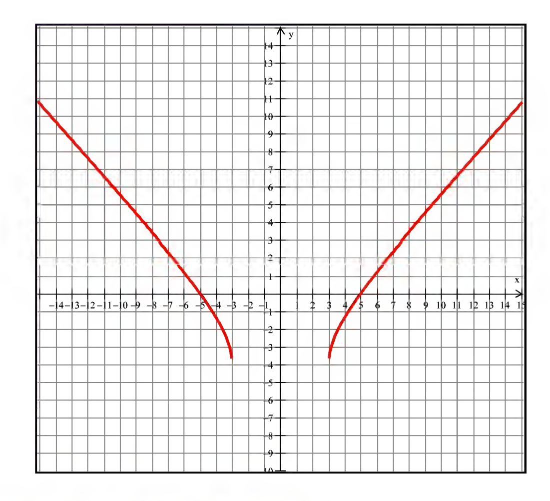
$Df(-5,5)$
$Rf(-2,3)$

$f) \ f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$



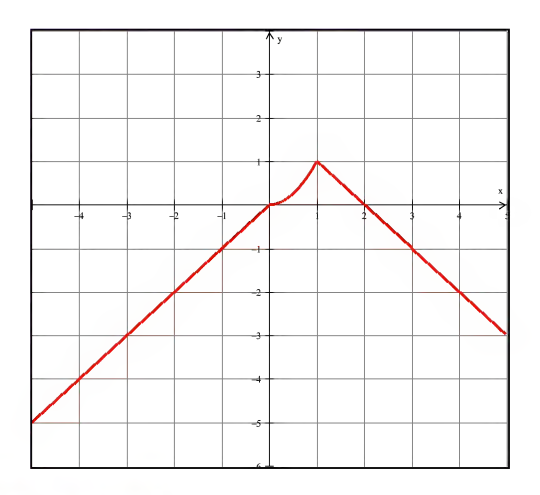
$Df(-\infty,-3) \cup (3,+\infty)$
$Rf(0,+\infty)$

$g) \ f(x) = \sqrt{x^2 - 9} - 4$



$Df(-\infty,-3) \cup (3,+\infty)$
$Rf(-4,+\infty)$

$$h) \ f(x) = \begin{cases} x & si \ x < 0 \\ x^2, & si \ 0 \le x \le 1 \\ 2 - x & si \ \ x > 1 \end{cases}$$



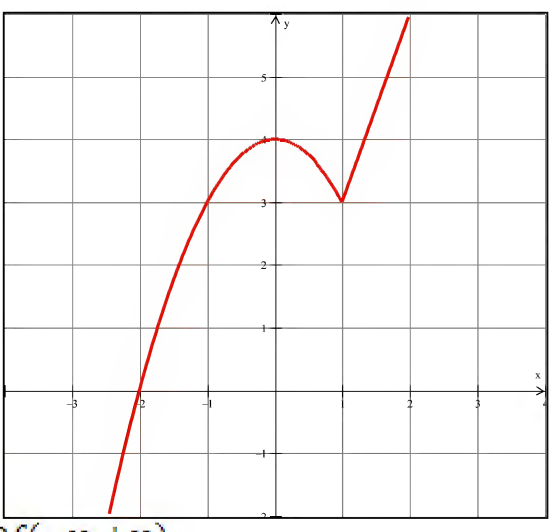
$Df(-\infty,+\infty)$
$Rf(-\infty,1)$

$$i)\ f(x) = \begin{cases} x^2, & si\ x < 0 \\ -x, & si\ 0 \le x \le 1 \\ x - 2, & si\ x > 1 \end{cases}$$

$Df(-\infty, +\infty)$

$Rf(-1, +\infty)$

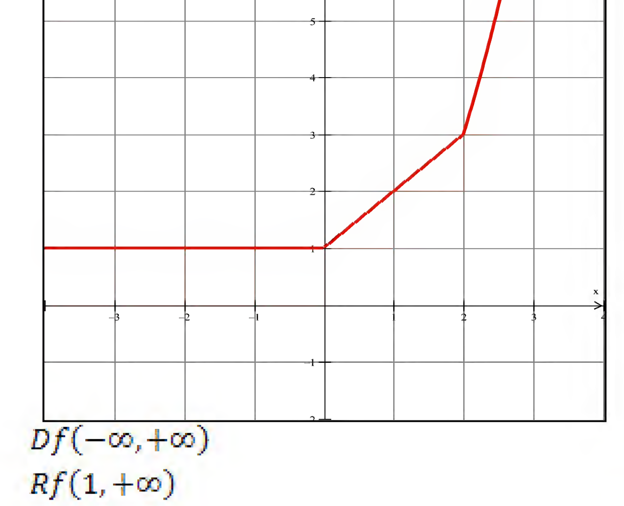
$$j)\ g(x) = \begin{cases} -x^2 + 4, & si\ x \le 1 \\ 3x, & si\ x > 1 \end{cases}$$



$Df(-\infty, +\infty)$

$Rf(-\infty, +\infty)$

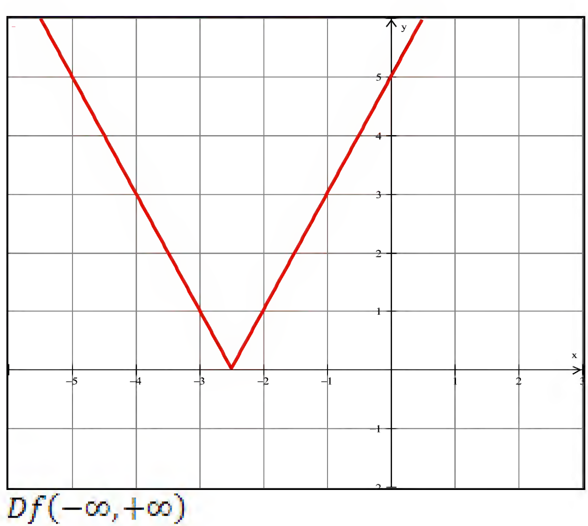
$$k)\ h(x) = \begin{cases} 1, & si\ x \le 0 \\ x + 1, & si\ 0 < x < 2 \\ x^2 - 1, & si\ x \ge 2 \end{cases}$$



$Df(-\infty, +\infty)$

$Rf(1, +\infty)$

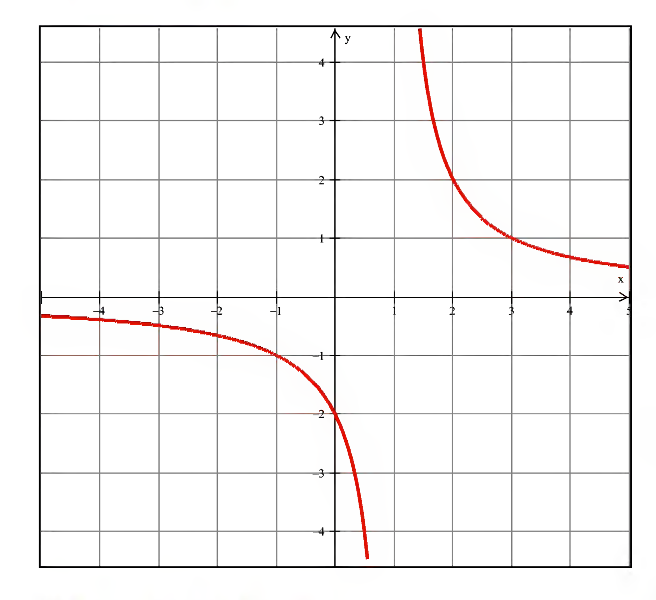
$l)\quad h(x) = |2x + 5|$



$Df(-\infty, +\infty)$

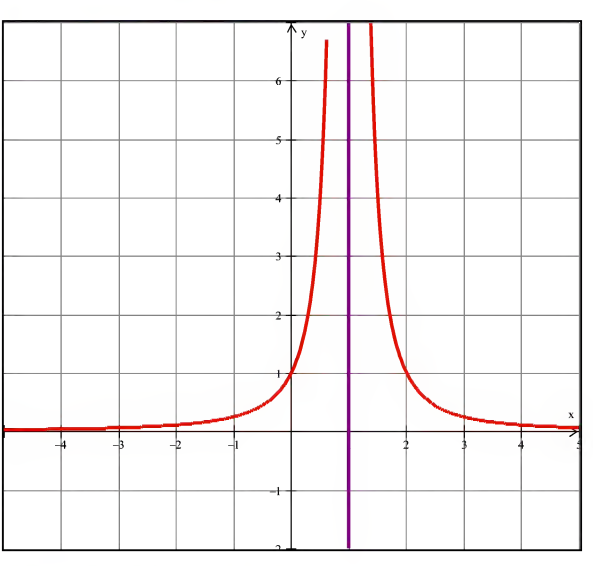
$Rf(0, +\infty)$

m) $g(x) = \frac{2}{x-1}$



$Df(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$
$Rf(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

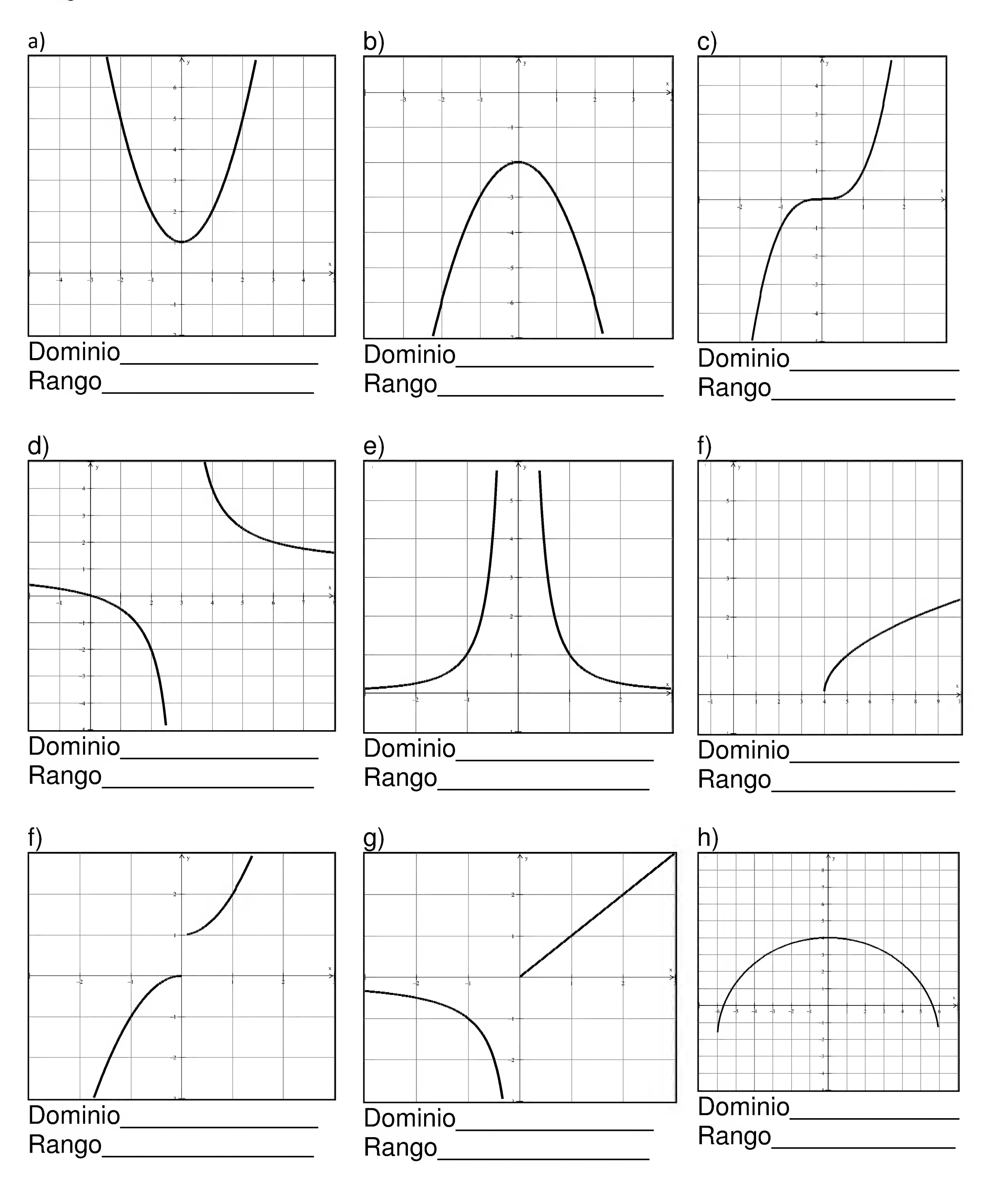
n) $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$



$Df(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$
$Rf(0, +\infty)$

EJERCICIOS:

En las siguientes representaciones gráficas de funciones, determine su dominio y rango.



CLASIFICACIÓN DE LOS DIFERENTES TIPOS DE FUNCIONES.

1. **FUNCIÓN DE UNA VARIABLE:** Cuando el valor de una variable "Y" (función) depende de una sola variable "X", tenemos una función de una sola variable independiente.
   Ejemplo: El área de un círculo, el área de un cuadrado, $y = x^2 + 6x - 6$, etc.

2. **FUNCIÓN DE VARIAS VARIABLES:** Cuando el valor de una variable "Y" depende de los valores de 2 ó más variables independientes.
   Ejemplo: El área de un triángulo; depende de la base y de su altura, El volumen de una caja depende de su longitud, ancho y altura; tenemos una función de 3 variables, Al invertir un capital, su interés, depende de la tasa, capital y del tiempo de inversión.

3. **FUNCIONES ALGEBRAICAS:** Son aquellas funciones cuyo valor puede ser obtenido mediante un número finito de operaciones algebraicas (suma, resta, multiplicación, división, elevación de potencias y la extracción de raíces). Las funciones algebraicas se clasifican en:
   1. FUNCIÓN RACIONAL: Es aquella cuyas variables no contienen exponentes fraccionales ni se encuentran bajo signo de radical y se expresa como el cociente de 2 funciones polinomiales.
      Ejemplo: $f(x) = \frac{x^3+27}{x+3}$, $f(x) = \frac{2}{x-3}$, etc.
   2. FUNCIÓN IRRACIONAL: Es aquella en la cual alguna de las variables tienen exponentes fraccionarios o se encuentran bajo signo radical.
      Ejemplo: $f(x) = \sqrt{3x^2 - 5}$, $f(x) = ax^{2/3}$
   3. FUNCIÓN ENTERA: Es aquella que no tiene ninguna variable en el denominador y no está afectada por exponentes negativos.
      Ejemplo: $f(x) = 3x^2 + 5$ $f(x) = x^2 - 4x + 8$
   4. FUNCIÓN POLINOMIAL: Son aquellas funciones que tienen la forma $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_nx^{n-n}$ Donde n es un

número entero positivo y $a_{0,}$ $a_{1,...,}a_n$ son números reales diferentes de cero.

Ejemplo: Lineal $f(x) = mx + b$

Cuadrática:$f(x) = ax^2 + bx + c$

Cúbica: $f(x) = x^3 - 5x + 7$ etc.

4. **FUNCIONES TRASCENDENTES:** Se consideran como funciones trascendentes a las exponenciales, logarítmicas, trigonométricas y trigonométricas inversas
Ejemplo:
$f(x) = 5^{x+2},$ $f(x) = \log_2 x + 3,$ $f(x) = tanx - 3,$ $f(x) = arcsenx^2$

5. **FUNCIONES EXPLÍCITAS E IMPLÍCITAS:** Sí están indicadas las operaciones que hay que realizar con la variable o variables independientes para obtener la función, se llama explícita. En caso contrario es función implícita. Una función explícita se puede escribir en forma implícita y hay funciones implícitas que pueden expresarse en función explícita.
Ejemplo: $y = 3x - 5$ *función explícita*
$x^2 - 3xy - y^2 = 0$ *función implícita*
$xy - 1 = 0$ *función implícita*
$y = \frac{1}{x}$ *función explícita*

OPERACIONES DE FUNCIONES.

Al igual que dos números $a \; y \; b$ pueden sumarse para producir un nuevo número $a + b$, también dos funciones $f \; y \; g$ pueden sumarse para producir una nueva función $f + g$. Ésta es sólo una de las diferentes operaciones sobre funciones ya que están: SUMA, DIFERENCIAS, PRODUCTOS, COCIENTES Y POTENCIAS.

Ejemplo: Sean $F(x) = \sqrt[4]{x+1}$ y $G(x) = \sqrt{9 - x^2}$ determinar la suma, diferencia, producto, cociente y F^5

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = \sqrt[4]{x+1} + \sqrt{9-x^2}$$
$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = \sqrt[4]{x+1} - \sqrt{9-x^2}$$
$$(f \times g)(x) = f(x) \times g(x) = \sqrt[4]{x+1}\sqrt{9-x^2}$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\sqrt[4]{x+1}}{\sqrt{9-x^2}}$$
$$f^5(x) = [f(x)]^5 = \left(\sqrt[4]{x+1}\right)^5 = (x+1)^{5/4}$$

COMPOSICIÓN DE FUNCIONES.

Si f actúa sobre x para producir $f(x)$ y luego g actúa sobre $f(x)$ para producir $g[f(x)]$, decimos que hemos compuesto g con f. La función resultante, llamada **composición** de g con f, se denota con $g \circ f$. Así

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)]$$

EJEMPLO: Sean $f(x) = \frac{x-3}{2}$ y $g(x) = \sqrt{x}$. Podemos componer estas funciones de dos maneras:

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)]$$
$$(g \circ f)(x) = g\left[\frac{x-3}{2}\right]$$
$$(g \circ f)(x) = \sqrt{\frac{x-3}{2}}$$

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)]$$
$$(f \circ g)(x) = f\left[\sqrt{x}\right]$$
$$(f \circ g)(x) = \frac{\sqrt{x}-3}{2}$$

EJERCICIOS:

1.-Sean $f(x) = \frac{x-3}{2}$ y $g(x) = \sqrt{x}$, DETERMINAR $(f \circ g)(12)$ Y $(f \circ g)(x)$

SOLUCIÓN:

$$(f \circ g)(12) = f[g(12)]$$
$$(f \circ g)(12) = f\left(\sqrt{36}\right)$$
$$(f \circ g)(12) = f(6)$$

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)]$$
$$(f \circ g)(x) = f\left(\sqrt{3x}\right)$$
$$(f \circ g)(x) = \frac{6\sqrt{3x}}{\left(\sqrt{3x}\right)^2 - 9}$$

$$(f \div g)(12) = \frac{6 \times 6}{6^2 - 9} = \frac{4}{3}$$

2.- Sean $f(x) = x + 1$ y $g(x) = x^2 + 2x - 3$, determinar la suma, el producto y la división.

SOLUCIÓN:

$$(f + g)(x) = x^2 + 3x - 2$$
$$(f \times g)(x) = x^3 + 3x^2 - x - 3$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x + 1}{x^2 + 2x - 3}$$

3.- Sean $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = \sqrt{x - 2}$, determinar la suma, el producto y la división.

SOLUCIÓN:

$$(f + g)(x) = \sqrt{x} + \sqrt{x - 2}$$
$$(f \times g)(x) = \sqrt{x^2 - 2x}$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \sqrt{\frac{x}{x - 2}}$$

4.- Sean $f(x) = \frac{1}{x-1}$ y $g(x) = \frac{1}{2x+1}$, determinar la suma, el producto y la división.

SOLUCIÓN:

$$(f + g)(x) = \frac{3x}{(x-1)(2x+1)}$$
$$(f \times g)(x) = \frac{1}{2x^2 - x - 1}$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{2x + 1}{x - 1}$$

5.- Sean $f(x) = \frac{x-1}{x-2}$ y $g(x) = \frac{x+1}{x+2}$, determinar la suma, el producto y la división.

SOLUCIÓN:

$$(f+g)(x) = \frac{2x^2+4x}{x^2-4}$$

$$(f \times g)(x) = \frac{x^2-1}{x^2-4}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x^2+x-2}{x^2-x-2}$$

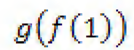
6.- Composición de funciones

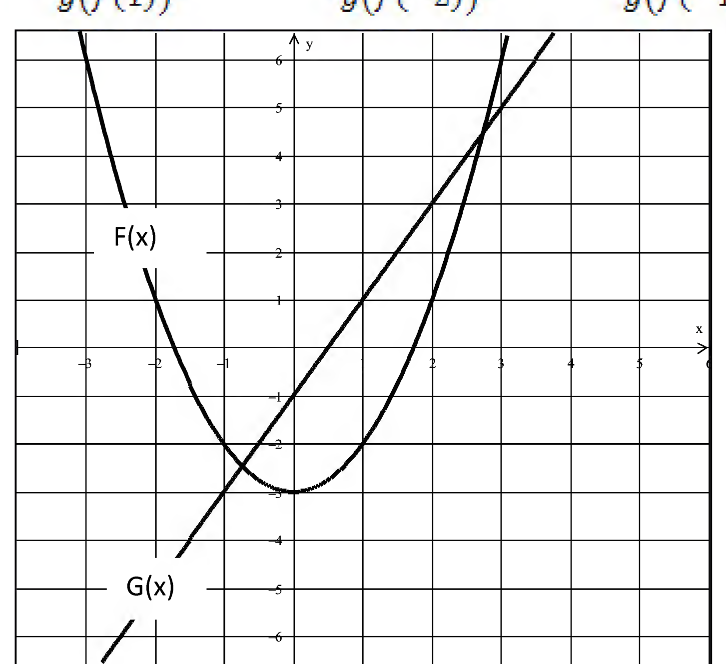
Completa la tabla siguiente:

$f(x)$	$g(x)$	$f[g(-3)]$	$g[f(-2/3)]$	$f[g(x)]$	$g[f(x)]$
$4x-5$	$3x+2$				
$2-x$	$4-3x$				
x^2	$-x+2$				
x^2-1	x^2+2				
$\frac{x-1}{x+2}$	$\frac{x-2}{x+1}$				
$2x^2-5$				$2x^2+12x+13$	
	$3x-2$				$30x-17$

7.- Resuelve las siguientes composiciones, usando la gráfica:

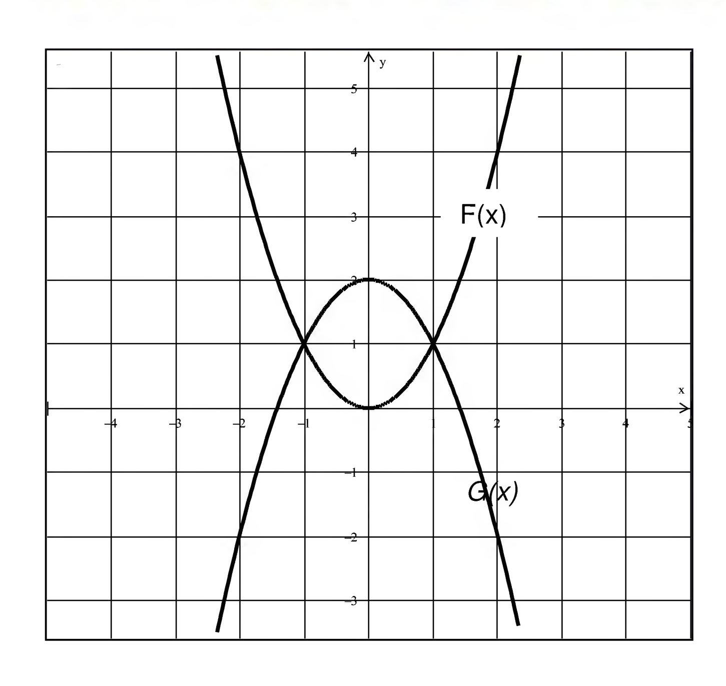
$f(g(2))$ $\quad$ $f(g(-1))$ $\quad$ $f(g(1))$ $\quad$ $f(g(0))$

$g(f(2))$ $\quad$  $g(f(1))$ $\quad$ $g(f(-2))$ $\quad$ $g(f(-1))$



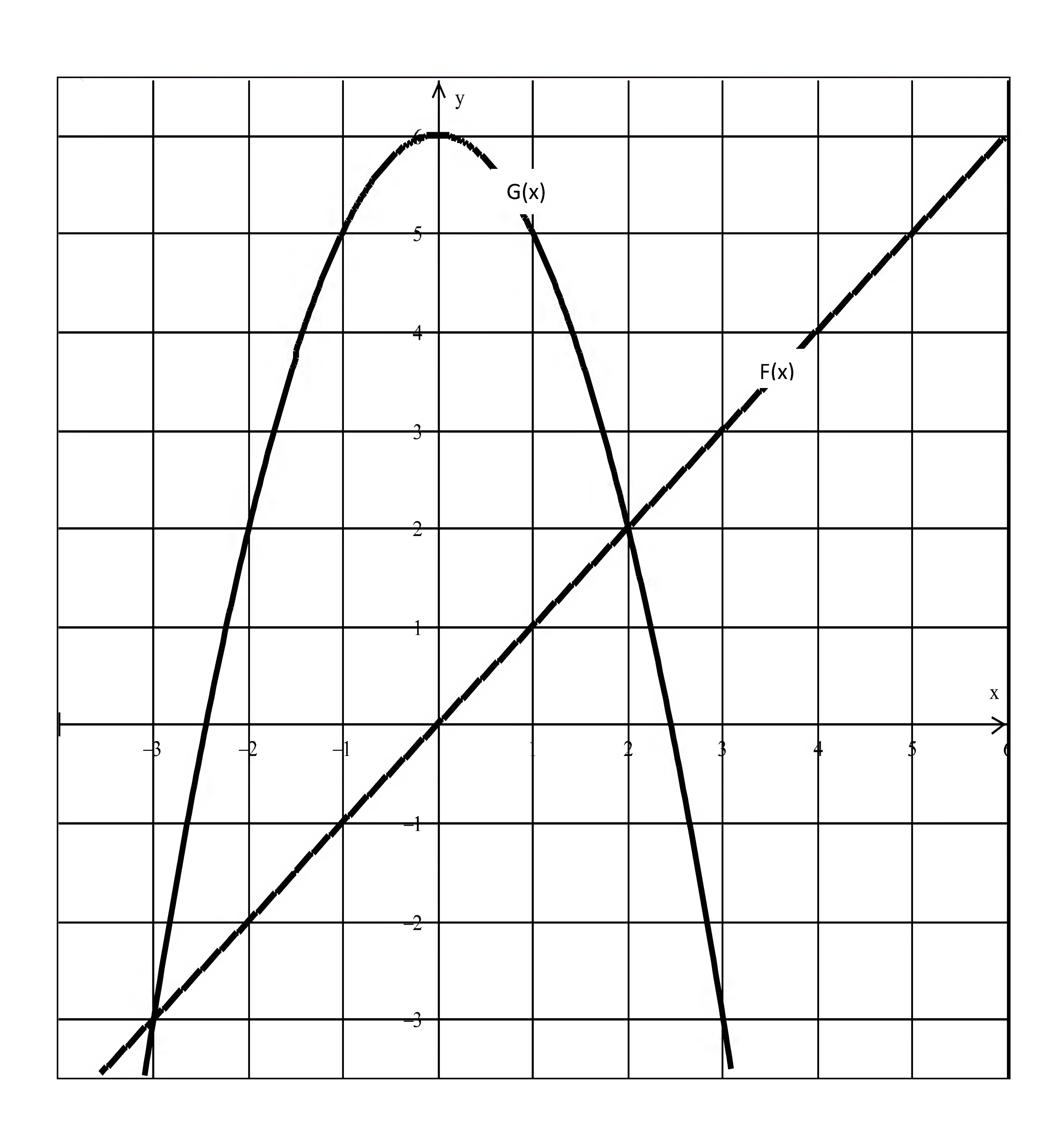
8.-Resolver lo que se te indica usando la gráfica:

$f(g(0))$ $\quad$ $f(g(2))$ $\quad$ $f(g(-2))$ $\quad$ $g(f(1))$ $\quad$ $g(f(0))$



9.-Resolver lo que se te indica usando la gráfica:

$f(g(2))$, $f(g(1))$, $f(g(-2))$, $f(g(3))$, $f(g(0))$, $g(f(-2))$, $g(f(1))$, $g(f(3))$



RAP.2

EMPLEA LA DEFINICIÓN Y TEOREMAS DE LÍMITES EN LA CONTINUIDAD Y DISCONTINUIDAD DE LAS FUNCIONES.

LÍMITES

Sea la función:

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

Graficando la función, se puede observar que el dominio contiene todos los números reales excepto $x = 1$, ya que para este valor de x la función está indefinida. La gráfica de la función es la recta $y = x + 1$ menos un punto $(1,2)$. La ausencia de este punto se muestra como un "agujero". Aunque $f(1)$ no está definida, está claro que podemos hacer el valor de $f(x)$ tan cercano como queramos a 2, eligiendo valores de x suficientemente cerca de 1, es decir, no nos interesa hallar el valor de $f(x)$, puesto que $f(x)$ no está definida en x=1; lo que se busca es el valor al que se acerca $f(x)$ cuando x lo hace a 1.

Se determina $f(x)$, considerando valores de x próximos a 1, es decir, al aproximarse por la izquierda, tenemos los siguientes valores 0.5, 0.75, 0.9, 0.99 y 0.999; por la derecha tenemos: 1.5, 1.25, 1.1, 1.01, y 1.001

x	0.5	0.75	0.9	0.99	0.999	→1←	1.001	1.01	1.1	1.25	1.5
$f(x)$	1.5	1.75	1.9	1.99	1.999	→?←	2.001	2.01	2.1	2.25	2.5

Decimos que $f(x)$ está arbitrariamente cercano a 2 conforme x se aproxima a1 o, simplemente, que $f(x)$ se aproxima al límite 2 cuando x se aproxima a 1.
Escribimos esto como:

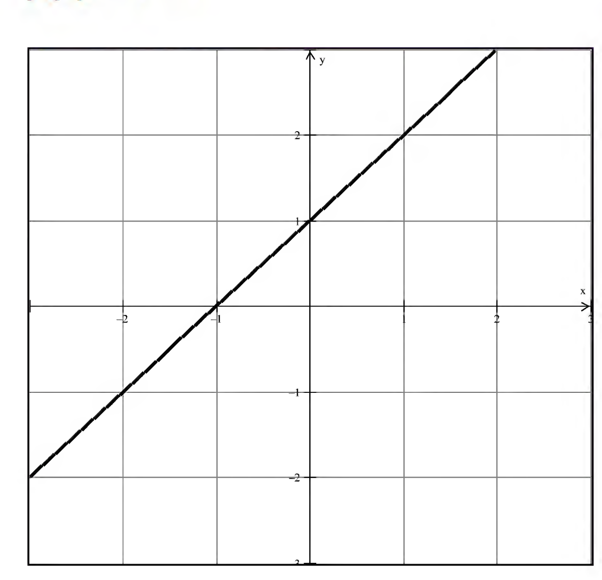
$\lim_{x\to 1} f(x) = 2$ ó $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2$

DEFINICIÓN:
El límite de una función $f(x)$, cuando $x \to a$ es el valor de la función cuando se toman valores sucesivos de x, cada vez más cercanos a "a", por la derecha y por

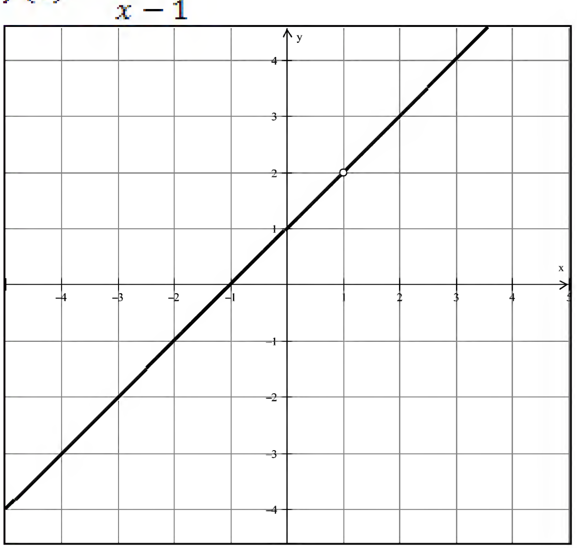
la izquierda que resulta ser la ordenada del punto de abscisa “a” exista o no en la gráfica el punto $(a, f(a))$ “con la función equivalente”.

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

$f(x) = x + 1$



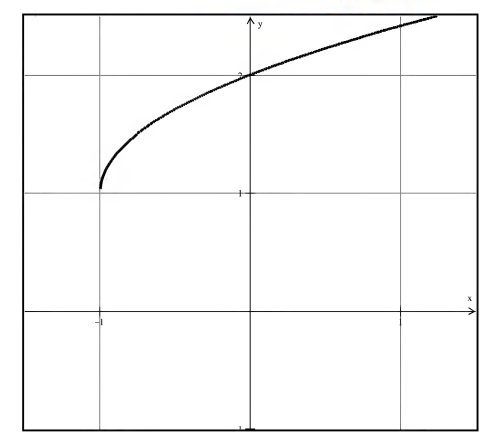
$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$



La gráfica de $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ es idéntica a la recta $y = x + 1$, excepto en $x = 1$, donde la función no está definida.

EJEMPLO: Usando la gráfica para la determinación de un límite.

a) Determinar el $\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sqrt{x+1}-1}$ por medio de la gráfica

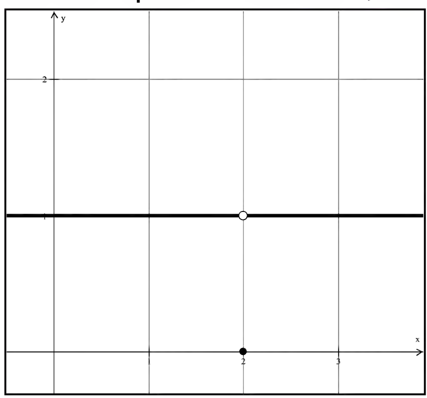


Observando la gráfica, se puede estimar que el límite a determinar es igual a 2.

b) Encuentre el límite de $f(x)$ cuando x tiende a 2, donde $f(x)$ se define como

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 2 \\ 0, & x = 2 \end{cases}$$

Solución: Debido a que $f(x) = 1$ para todo x diferente de x=2, puede concluir que el límite es 1, como se muestra en la gráfica.



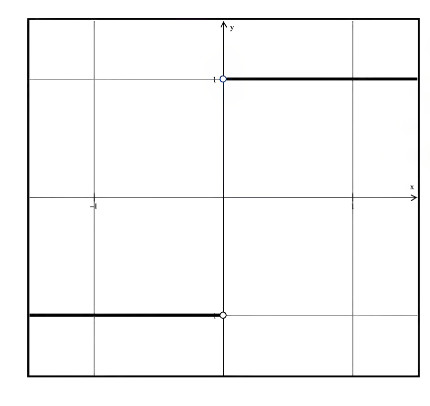
EJEMPLO DE LÍMITES QUE NO EXISTEN

a) Comportamiento que difiere desde la derecha y desde la izquierda.

Demostrar que el límite no existe.

$$\lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$$

Solución: Considere la gráfica de la función $f(x) = \frac{|x|}{x}$



Se puede observar que para los valores positivos de x $\frac{|x|}{x} = 1, \quad x > 0$ y , para los valores negativos de x $\frac{|x|}{x} = -1, \quad x < 0$. Esto significa que no importa cuán cerca esté x de 0, habrá valores de x positivos y negativos que producirán $f(x) = 1$ y $f(x) = -1$.

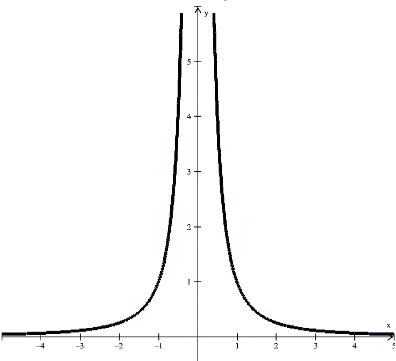
b) Comportamiento no acotado

Analice la existencia del límite

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}$$

Solución: Sea $f(x) = \frac{1}{x^2}$. En la gráfica se puede ver que, cuando x tiende a cero desde la derecha o desde la izquierda, $f(x)$ crece sin cota. Esto significa que, al elegir x suficientemente cercano a cero, puede forzar a que $f(x)$ sea tan grande como desee.

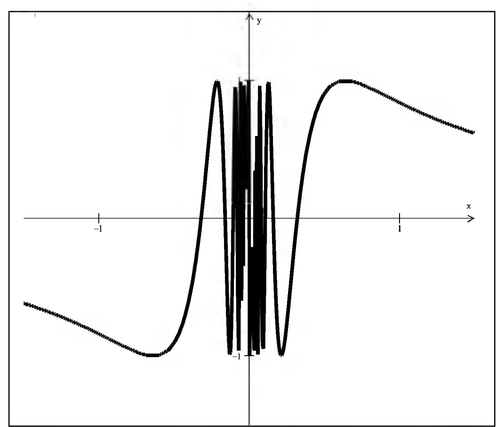
En virtud de que $f(x)$ no se está aproximando a un número real L cuando x 0tiende a cero, puede concluir que el límite no existe.



c) Comportamiento oscilatorio

Examine la existencia del límite $\lim_{x\to 0} sen\frac{1}{x}$

Solución: Sea la gráfica de la función $f(x) = sen\frac{1}{x}$



En la gráfica se puede ver que, cuando x tiende a cero, $f(x)$ oscila entre -1 y 1. Por tanto, el límite no existe.

Comportamientos comunes asociados con la inexistencia de un límite.

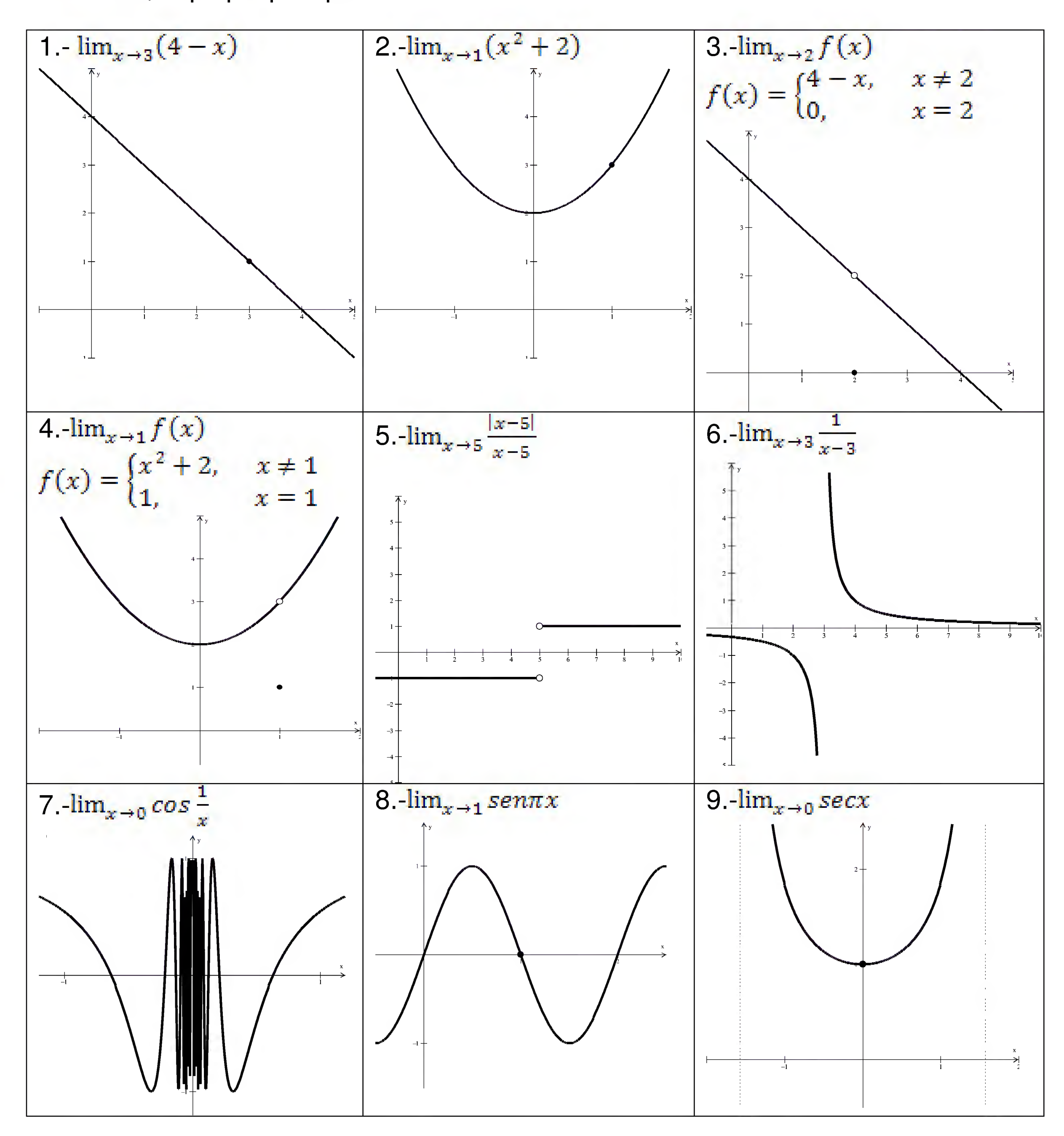
1.-$f(x)$ tiende a un número diferente desde la derecha de a que al que tiende desde la izquierda de este último.

2.- $f(x)$ crece o decrece sin cota cuando x tiende a a.

3.- $f(x)$ oscila entre dos valores fijos cuando x tiende a a.

EJERCICIOS:

En los ejercicios siguientes use la gráfica para hallar el límite (si existe). Si el límite no existe, explique por qué.



RAP 3

UTILIZA FUNCIONES Y TEOREMAS DE LÍMITES EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE SU ENTORNO ACADÉMICO

TEOREMA PRINCIPAL DE LOS LÍMITES

Sean n un entero positivo, k una constante y f y g funciones que tengan límites en c. Entonces

1. $\lim_{x\to c} k = k$;
2. $\lim_{x\to c} x = c$
3. $\lim_{x\to c} kf(x) = k \lim_{x\to c} f(x)$
4. $\lim_{x\to c}[f(x) + g(x)] = \lim_{x\to c} f(x) + \lim_{x\to c} g(x)$;
5. $\lim_{x\to c}[f(x) - g(x)] = \lim_{x\to c} f(x) - \lim_{x\to c} g(x)$;
6. $\lim_{x\to c}[f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x\to c} f(x) \cdot \lim_{x\to c} g(x)$;
7. $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to c} f(x)}{\lim_{x\to c} g(x)}$, siempre que $\lim_{x\to c} g(x) \neq 0$
8. $\lim_{x\to c}[f(x)]^n = [\lim_{x\to c} f(x)]^n$
9. $\lim_{x\to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to c} f(x)}$, siempre que $\lim_{x\to c} f(x) > 0$ cuando n sea par.

Existen ciertos límites que se presentan cuando la variable "x" tiende a cero o al infinito, son los siguientes.

1. $\lim_{x\to 0} \frac{k}{x} = \infty$ ó $\frac{k}{0} = \infty$
2. $\lim_{x\to 0} kx = 0$ ó $k(o) = 0$
3. $\lim_{x\to 0} \frac{x}{k} = 0$ ó $\frac{0}{k} = 0$
4. $\lim_{x\to \infty} \frac{k}{x} = 0$ ó $\frac{k}{\infty} = 0$
5. $\lim_{x\to \infty} kx = \infty$ ó $k(\infty) = \infty$
6. $\lim_{x\to \infty} \frac{x}{k} = \infty$ ó $\frac{\infty}{k} = \infty$

EJEMPLO:

Calcular los límites:

1. $\lim_{x\to 3}(x+1)=4$
2. $\lim_{x\to 2}(x^2+4x)=12$
3. $\lim_{x\to -2}\left(\frac{3x+4}{x+5}\right)=-\frac{2}{3}$
4. $\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^2+2x-3}{x+1}\right)=\frac{0}{2}=0$ Sí el límite del numerador es cero y el del denominador es diferente de cero, el límite del cociente es igual a cero.
5. $\lim_{x\to -2}\left(\frac{2x^2-3x+1}{x+2}\right)=\frac{15}{0}=+\infty$ Sí el límite del numerador es diferente de cero y el del denominador es cero, el cociente no tiene límite y se establece que tiende a más o menos infinito $(\pm\infty)$.
6. $\lim_{x\to 2}\left(\frac{x^2-4}{x-2}\right)=\frac{0}{0}$ Forma indeterminada.

   Sí los límites del numerador y del denominador son ambos iguales a cero, se tiene la forma $\left(\frac{0}{0}\right)$, que se denomina indeterminada. La indeterminación se puede eliminar buscando una función equivalente mediante operaciones algebraicas sencillas

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{x^2-4}{x-2}\right) \qquad = \lim_{x\to 2}\frac{(x+2)(x-2)}{(x-2)}$$

$$= \lim_{x\to 2}(x+2)$$

$$= 4$$

7. $\lim_{x\to 4}\frac{x^2-x-12}{x-4}=\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-x-12}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)(x+3)}{(x-4)}$$

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-x-12}{x-4}=\lim_{x\to 4}(x+3)$$

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-x-12}{x-4}=7$$

8. $\lim_{x\to 2}\frac{x^2+x-6}{x^2-4}=\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+x-6}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{(x+3)(x-2)}{(x+2)(x-2)}$$

$=\lim_{x\to 2}\frac{x+3}{x+2}$

$=\frac{5}{4}$

9. $\lim_{y\to 3}\left(\frac{y^3-27}{y^2-9}\right)=\frac{0}{0}$

$$\lim_{y\to 3}\left(\frac{y^3-27}{y^2-9}\right)=\lim_{y\to 3}\frac{(y-3)(y^2+3y+9)}{(y-3)(y+3)}$$

$=\lim_{y\to 3}\frac{y^2+3y+9}{y+3}$

$=\frac{3^2+3(3)+9}{3+3}$

$=\frac{27}{6}$

$=\frac{9}{2}$

10. $\lim_{x\to 3}\frac{x^3+4x^2-11x-30}{x-3}=\frac{0}{0}$ → se resuelve la división

$\lim_{x\to 3}\frac{x^3+4x^2-11x-30}{x-3}=\lim_{x\to 3}x^2+7x+10$

$=3^2+7(3)+10$

$=40$

LÍMITES CON RADICALES EN EL CASO $\frac{0}{0}$

EJEMPLO:

1.- $\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{x+1}-1}=$

$$\lim_{X\to 0}\frac{x}{\sqrt{x+1}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{x+1}-1}\left(\frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}+1}\right)$$

$=\lim_{x\to 0}\frac{x(\sqrt{x+1}+1)}{(x+1)-1}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{x(\sqrt{x+1}+1)}{x}$

$=\lim_{x\to 0}\sqrt{x+1}+1$

$$= \sqrt{0+1} + 1$$

$$= 2$$

2.- $\lim_{x \to 2} \frac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}} =$

$$\lim_{x \to 2} \frac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}} = \lim_{x \to 2} \frac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}} \left(\frac{3+\sqrt{x^2+5}}{3+\sqrt{x^2+5}} \right)$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{(4-x^2)(3+\sqrt{x^2+5})}{(9-(x^2+5))}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{(4-x^2)(3+\sqrt{x^2+5})}{(9-x^2-5)}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{(4-x^2)(3+\sqrt{x^2+5})}{(4-x^2)}$$

$$= \lim_{x \to 2} \left(3+\sqrt{x^2+5}\right)$$

=6

LÍMITES AL INFINITO DEL TIPO $\frac{\infty}{\infty}$

Sí los límites del numerador y del denominador son ambas iguales a infinito, se tiene la forma indeterminada $\frac{\infty}{\infty}$. La indeterminación se puede eliminar dividiendo ambos términos entre la variable de mayor grado que interviene en la expresión.

EJEMPLO:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{4x^3-5x^2+6}{7x-3x^2+9x^3} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{4x^3-5x^2+6}{x^3}}{\frac{7x-3x^2+9x^3}{x^3}}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{4-\frac{5}{x}+\frac{6}{x^3}}{\frac{7}{x^2}-\frac{3}{x}+9}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{4-\frac{5}{\infty}+\frac{6}{\infty^3}}{\frac{7}{\infty^2}-\frac{3}{\infty}+9}$$

$$= \frac{4}{9}$$

LÍMITES CON FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS.

Los límites de funciones polinomiales, siempre pueden encontrarse por sustitución y los límites de funciones racionales pueden encontrarse por sustitución, siempre y cuando el denominador no sea cero en el punto límite. Esta regla de sustitución se aplica también a las funciones trigonométricas.

TEOREMA A. Límites de funciones trigonométricas.

Para todo número real c en el dominio de la función.

1.- $\lim_{x\to c} senx = sen\ c$

2.-$\lim_{x\to c} cosx = \cos\ c$

3.-$\lim_{x\to c} tanx = \tan\ c$

4.-$\lim_{x\to c} cotx = \cot\ c$

5.-$\lim_{x\to c} secx = \sec\ c$

6.-$\lim_{x\to c} cscx = \csc\ c$

TEOREMA B. Límites trigonométricos especiales.

1.- $\lim_{x\to 0} senx = 0$

2.-$\lim_{x\to 0} cosx = 1$

3.-$\lim_{x\to 0} \frac{senx}{x} = 1$

4.-$\lim_{x\to 0} \frac{1}{cosx} = 1$

5.-$\lim_{x\to 0} \frac{1-cosx}{x} = 0$

IDENTIDADES FUNDAMENTALES

RECIPROCAS	COCIENTE	PITAGORICAS	FUNCIONES DEL ÁNGULO DOBLE
1.-$senx.cscx = 1$	1.-$tanx = \frac{senx}{cosx}$	1.-$sen^2x + cos^2x = 1$	1.-$sen2x = 2senx.cosx$
2.-$cosx.secx = 1$	2.-$cotx = \frac{cosx}{senx}$	2.-$sec^2x = 1 + tan^2$	2.-$cos2x = 2cos^2x - 1$
3.-$tanx.cotx = 1$		3.-$csc^2x = 1 + cot^2x$	3.-$tan2x = \frac{2tanx}{1-tan^2x}$

EJEMPLO:

1.-$\lim_{t\to 0}\frac{1-cost}{sent} = \lim_{t\to 0}\frac{\frac{1-cost}{t}}{\frac{sent}{t}}$

$= \frac{\lim_{t\to 0}\frac{1-cost}{t}}{\lim_{t\to 0}\frac{sent}{t}}$

$= \frac{0}{1} = 0$

2.-$\lim_{x\to 0}\frac{sen4x}{tanx} = \frac{\lim_{x\to 0} sen4x}{\lim_{x\to 0} tanx}$

$= \frac{\lim_{x\to 0}\frac{4sen4x}{4x}}{\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{senx}{cosx}\right)}$

$= \frac{4\lim_{x\to 0}\frac{sen4x}{4x}}{\lim_{x\to 0}\frac{senx}{xcosx}}$

$= \frac{4(1)}{\lim_{x\to 0}\frac{senx}{x}\frac{1}{cosx}}$

=4

EJERCICIO: Calcular los siguientes límites:

1.-$\lim_{x\to 2} x^4$

2.-$\lim_{x\to 0}(2x-1)$

3.-$\lim_{x\to -3}(x^2+3x)$

4.-$\lim_{x\to -3}(2x^2+4x+1)$

5.-$\lim_{x\to 2}\frac{1}{x}$

6.-$\lim_{x\to 1}\frac{x-3}{x^2+4}$

7.-$\lim_{x\to 7}\frac{5x}{\sqrt{x+2}}$

8.-$\lim_{x\to 4}\frac{4-x}{x^2-16}$ $\quad sol: -\frac{1}{8}$

9.-$\lim_{x\to 2}\frac{x^4-16}{x-2}$ $\quad sol: 32$

10.-$\lim_{x\to 5}\frac{x^2-25}{x-5}$ $\quad sol: 10$

11.-$\lim_{x\to -4}\frac{16-x^2}{4+x}$ $\quad sol: 8$

12.-$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+2x-3}{x-1}$ $\quad sol: 4$

13.-$\lim_{x\to 1}\frac{1-x^2}{x^2+x-2}$ $\quad sol: -\frac{2}{3}$

14.-$\lim_{x\to -3}\frac{x^2+5x+6}{x^2-x-12}$ $sol: \frac{1}{7}$

15.-$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x^2-1}$ $sol: -\frac{1}{2}$

16.-$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x^2-4}$ $sol: 3$

17.-$\lim_{x\to -3}\frac{x^3+27}{x^2-x-12}$ $sol: -\frac{27}{7}$

18.-$\lim_{x\to \frac{3}{2}}\sqrt{\frac{8x^3-27}{4x^2-9}}$ $sol: \frac{3}{\sqrt{2}}$

LÍMITES CON RADICAL

8.-$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2}}{x}$ $sol: \frac{1}{2\sqrt{2}}$

9.-$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{3+x}-\sqrt{3}}{x}$ $sol: \frac{1}{2\sqrt{3}}$

10.-$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{2+x}-\sqrt{2}}$ $sol: 2\sqrt{2}$

11.-$\lim_{x\to 0}\frac{2-\sqrt{4-x}}{x}$ $sol: \frac{1}{4}$

12.-$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2}$ $sol: \frac{1}{2\sqrt{2}}$

13.-$\lim_{x\to 5}\frac{25-x^2}{3-\sqrt{x^2-16}}$ $sol: 6$

14.-$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{\sqrt{x^2+7}-4}$ $sol: 8$

LÍMITES AL INFINITO

15.-$\lim_{x\to \infty}\frac{2-5x^2}{4x+8x^2}$ $sol: -\frac{5}{8}$

16.-$\lim_{t\to \infty}\frac{2t^3-3t^2+4}{5t-t^2-7t^3}$ $sol: -\frac{2}{9}$

17.-$\lim_{x\to \infty}\frac{7-3x^2}{5x+9x^2}$ $sol: -\frac{3}{9}$

18.-$\lim_{x\to \infty}\frac{8x^3-3x^2+1}{4x^3+5x-7}$ $sol: 2$

19.-$\lim_{x\to\infty}\frac{6x+2}{3x+5}$ $sol: 2$

20.-$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{x^2+1}$ $sol: 1$

21.-$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-x^2+2x-1}{2x^3+3x-10}$ $sol: \frac{1}{2}$

22.-$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+4}}{x+4}$ $sol: 1$

24.-$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{9x^2+2}}{3-4x}$ $sol. -\frac{3}{4}$

LÍMITES CON FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

25.-$\lim_{x\to 0}\frac{x^2 cosx}{x+1}$ $sol: 0$

26.-$\lim_{x\to 0}\frac{sen3x}{x}$ $sol: 3$

27.-$\lim_{x\to 0}\frac{cosx}{x+1}$ $sol: 1$

28.-$\lim_{x\to 0} sen^2x. cosx$ $sol: 0$

29.-$\lim_{x\to 0} 3tanx$ $sol: 0$

30.-$\lim_{x\to 0}\frac{senx}{tanx}$ $sol: 1$

31.-$\lim_{x\to 0}\frac{tanx}{x}$ $sol: 1$

32.-$\lim_{x\to 0}\frac{sen2x}{x}$ $sol: 2$

33.-$\lim_{x\to 0}\frac{senx}{2x}$ $sol: \frac{1}{2}$

En los siguientes límites calcular lo que se pide en cada inciso.

34.-$f(x) = 5 - x,$ $g(x) = x^3$

a)$\lim_{x\to 1} f(x)$ b)$\lim_{x\to 4} g(x)$ c)$\lim_{x\to 1} g\left(f(x)\right)$

35.-$f(x) = 4 - x^2,$ $g(x) = \sqrt{x+1}$

a)$\lim_{x\to 1} f(x)$ b)$\lim_{x\to 3} g(x)$ c)$\lim_{x\to 1} g\left(f(x)\right)$

Use la información para evaluar los límites

36.-$\lim_{x \to c} f(x) = 2$

$\lim_{x \to c} g(x) = 3$

a) $\lim_{x \to c}[5g(x)]$

b) $\lim_{x \to c}[f(x) + g(x)]$

c) $\lim_{x \to c}[f(x)g(x)]$

d) $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)}$

37.-$\lim_{x \to c} f(x) = 4$

a) $\lim_{x \to c}[f(x)]^3$

b) $\lim_{x \to c} \sqrt{f(x)}$

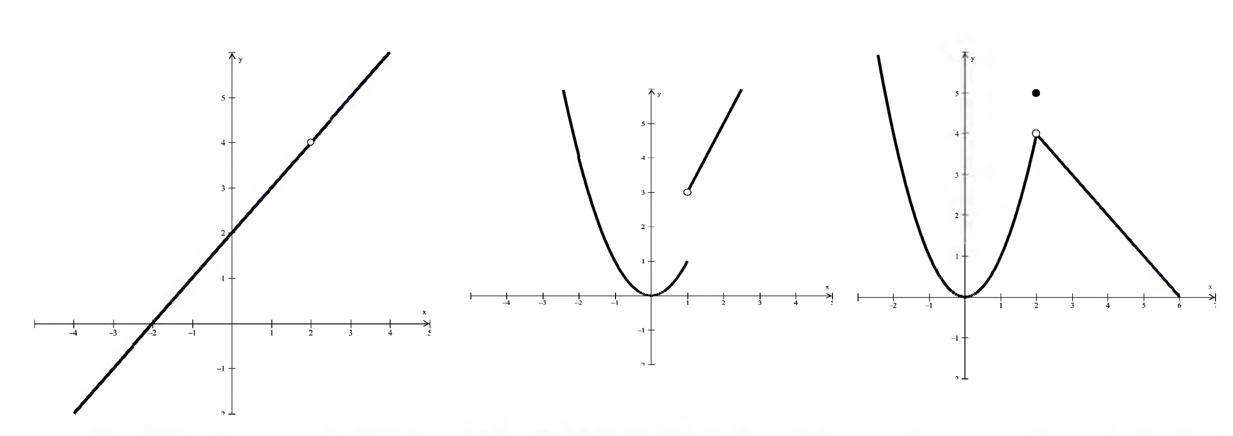
c) $\lim_{x \to c}[3f(x)]$

d) $\lim_{x \to c}[f(x)]^{3/2}$

CONTINUIDAD Y LÍMITES LATERALES.

CONTINUIDAD EN UN PUNTO Y SOBRE UN INTERVALO ABIERTO.

Decir que una función es continua en $x = c$ significa que no existe interrupción en la gráfica de f en c. Es decir, su gráfica no se rompe en c y no hay agujeros, saltos o brechas. En la siguiente figura se identifican tres valores de x en los que la gráfica de f no es continua. En todos los demás puntos del intervalo (a, b), la gráfica de f no se interrumpe y es **continua.**



$1. -En\ f(2)\ no\ está\ definida.$ $2. -El\ \lim_{x \to 1} f(x)\ no\ existe$ 3.-$El \lim_{x \to 2} f(x) \neq f(2)$

Existen tres condiciones por las que la gráfica de f no es continua en $x = c$.

La continuidad en $x = c$ puede destruirse por cualquiera de las condiciones siguientes:

1.-La función no está definida en $x = c$.

2.-El límite de $f(x)$ no existe en $x = c$.

3.-El límite de $f(x)$ existe en $x = c$, pero no es igual a $f(c)$.

Si ninguna de las condiciones anteriores se cumple, se dice que la función f es continua en c, como se indica en la importante definición que sigue.

DEFINICIÓN DE CONTINUIDAD.

CONTINUIDAD EN UN PUNTO: Una función f es **continua en c** si se cumplen las tres condiciones siguientes:

1.-$f(c)$ está definida.

2.-$\lim_{x\to c} f(x)$ existe.

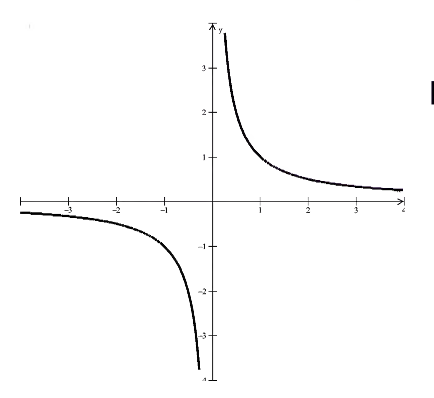
3.-$\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$

CONTINUIDAD SOBRE UN INTERVALO ABIERTO: Una función es **continua sobre un intervalo abierto (a, b)** si es continua en cada punto del intervalo. Una función que es continua sobre toda la recta real $(-\infty, \infty)$ es **continua en todas partes.**

Las funciones discontinuas caen en dos categorías: **evitables y no evitables**

CONTINUIDAD Y DISCONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN.

1.-Sea la función $f(x) = \frac{1}{x}$

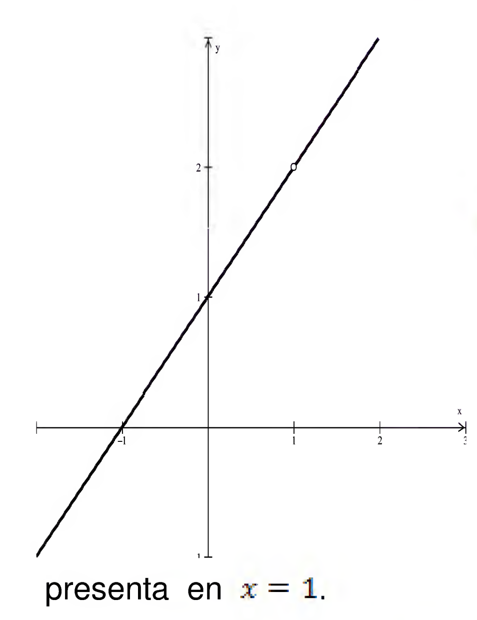


DISCONTINUIDAD INFINITA EN $x = 0$.

En $x = 0$, f tiene una discontinuidad infinita, no hay manera de definir $f(0)$ de modo que la función se haga continua en $x = 0$.

La discontinuidad **no se puede evitar** puesto que aquí no existe el límite, es decir, $\lim_{x \to o} f(x)$ no existe

2.-Sea la función $g(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$



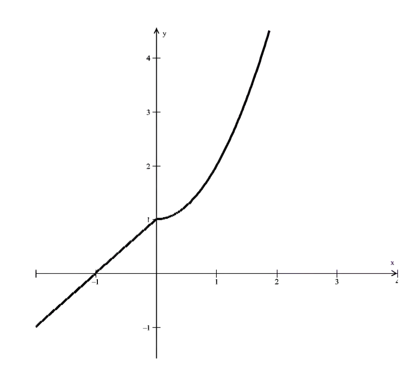
Discontinuidad evitable en $x = 1$

Se dice que una discontinuidad en c es evitable, si f puede hacerse continua al definir (o volver a definir) $f(c)$ de manera apropiada.

Si $g(1)$ se define como 2, la función “recién definida” es continua para todos los números reales.

Evitar la discontinuidad consiste en llenar de forma adecuada el hueco. En este caso el hueco que presenta en $x = 1$.

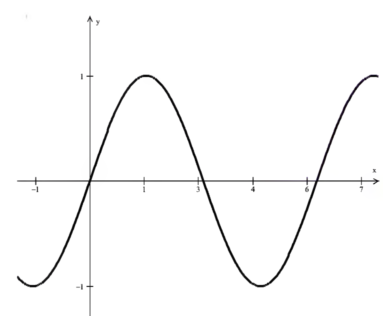
3.-Sea la función $h(x) = \begin{cases} x + 1, & x \leq 0 \\ x^2 + 1, & x > 0 \end{cases}$



Continuidad sobre toda la recta real.

La función h está compuesta de dos funciones a su vez y es continua sobre $(-\infty, 0)$ y sobre $(0, \infty)$, y, debido a que $\lim_{x \to 0} h(x = 1)$, h es continua sobre toda la función.

4.-Sea la función $y = senx$



Continuidad sobre toda la recta real.

El dominio está constituido por todos los números reales. La función es continua sobre todo su dominio, $(-\infty, \infty)$.

Para comprender la continuidad sobre un intervalo cerrado, es necesario ver el **límite lateral. El límite desde la derecha** significa que x tiende a c desde valores mayores que c. Este límite se denota como

$\lim_{x \to c^+} f(x) = L$ Límite desde la derecha.

El límite desde la izquierda significa que x tiende a c desde valores menores que c. Este límite se denota como

$\lim_{x \to c^-} f(x) = L$ Límite desde la izquierda.

Los límites laterales son útiles al obtener límites de funciones que comprenden radicales. Por ejemplo, si n es un entero par,

$$\lim_{x \to 0^+} \sqrt[n]{x} = 0$$

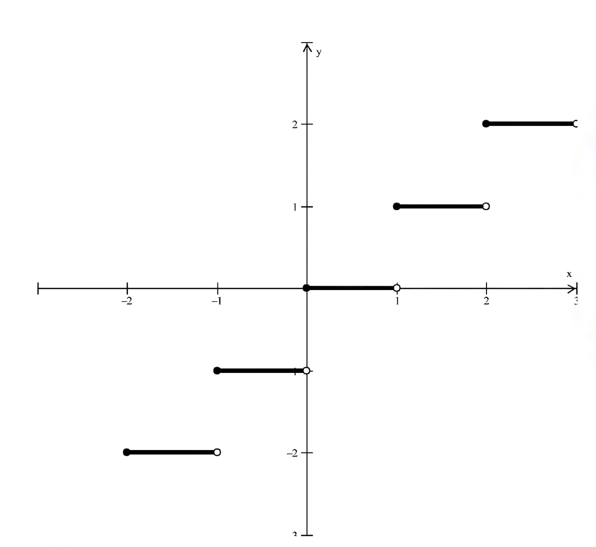
Es posible usar los límites laterales para investigar el comportamiento de las **funciones escalón.** Un tipo común de función escalón es la **función mayor entero $[\![x]\!]$,** definida por

$[\![x]\!] = el\ mayor\ entero\ \ n\ \ tal\ que\ n \leq x,$ **Función mayor entero.**

Por ejemplo, $[\![2.5]\!] = 2 \quad y \quad [\![-2.5]\!] = -3$

Ejemplo:

Encuentre el límite de la función mayor entero $f(x) = [\![x]\!]$ cuando x tiende a 0 desde la izquierda y desde la derecha.



El límite cuando x tiende a 0 *desde la izquierda,* se expresa por $\lim_{x \to 0^-} [\![x]\!] = -1$

Y el límite, cuando x tiende a 0 *desde la derecha,* se expresa por $\lim_{x \to 0^+} [\![x]\!] = 0.$

La función mayor entero no es continua en 0 porque, en cero, los límites desde la izquierda y desde la derecha son diferentes. Mediante un razonamiento similar, puede ver que la función mayor entero no es continua en cualquier entero n. Cuando el límite desde la izquierda no es igual al límite desde la derecha, el límite (bilateral) *no existe.*

El concepto de límite lateral permite extender la definición de continuidad hacia los intervalos cerrados. Una función es continua sobre un intervalo cerrado si es continua en el interior del intervalo y posee continuidad lateral en los puntos extremos.

DEFINICIÓN DE CONTINUIDAD SOBRE UN INTERVALO CERRADO.

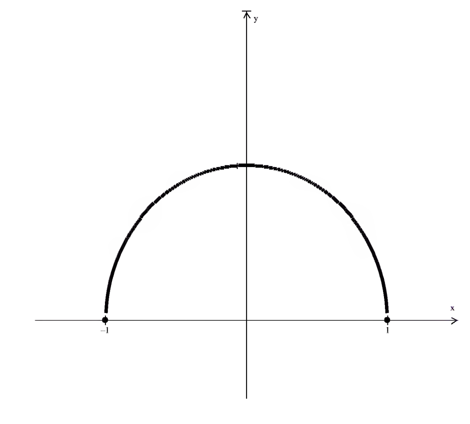
Una función f es **continua sobre el intervalo cerrado $[a,b]$,** si es continua en cada punto del intervalo abierto (a,b) y sí

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a) \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$$

La función f es **continua desde la derecha** en a y **continua desde la izquierda** en b.

Ejemplo: CONTINUIDAD SOBRE UN INTERVALO CERRADO.

Examinar la continuidad de $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$



El dominio de f es el intervalo cerrado $[-1,1]$. En todos los puntos en el intervalo abierto $(-1,1\,)$ es continua, y la continuidad de f se deduce también con base en los siguientes límites:

$\lim_{x\to -1^+} \sqrt{1-x^2} = 0 = f(-1)$ *Continuidad desde la derecha.*

$\lim_{x\to 1^-} \sqrt{1-x^2} = 0 = f(1)$ *Continuidad desde la izquierda.*

EJERCICIOS:

I. Para cada una de las siguientes funciones, trazar la gráfica, encontrar los límites indicados sí existen y analizar la continuidad.

1.- $f(x) = \begin{cases} x+2 & x \leq 5 \\ -x+10 & x > 5 \end{cases}$

$a)\ \lim\limits_{x\to 5^-} f(x) =$ $b)\ \lim\limits_{x\to 5^+} f(x) =$ $c)\ \lim\limits_{x\to 5} f(x) =$

2.- $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & x < 3 \\ 10-x & x \geq 3 \end{cases}$

$a)\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) =$ $b)\ \lim\limits_{x\to 3^-} f(x) =$ $c)\ \lim\limits_{x\to 3} f(x) =$

3.- $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 2 \\ 8-2x & x > 2 \end{cases}$

$a)\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) =$ $b)\ \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) =$ $c)\ \lim\limits_{x\to 2} f(x) =$

4.- $f(x) = \begin{cases} \frac{x+2}{2} & x \leq 3 \\ \frac{12-2x}{3} & x > 3 \end{cases}$

$a)\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) =$ $b)\ \lim\limits_{x\to 3^-} f(x) =$ $c)\ \lim\limits_{x\to 3} f(x) =$

5.- $f(x) = \begin{cases} 2 & x < 1 \\ -1 & x = 1 \\ -3 & x > 1 \end{cases}$

$a)\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) =$ $b)\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) =$ $c)\ \lim\limits_{x\to 1} f(x) =$

II. Discuta la continuidad de la función sobre el intervalo cerrado.

6.- $g(x) = \sqrt{25 - x^2}$ $[-5,5]$

7.- $f(t) = 3 - \sqrt{9 - t^2}$ $[-3,3]$

8.- $f(x) = \begin{cases} 3 - x, & x \leq 0 \\ 3 + \frac{1}{2}x, & x > 0 \end{cases}$ $[-1,4]$

9.- $f(t) = \frac{1}{x^2 - 4}$ $[-1,2]$

III Encuentre los valores de x (si los hay) en los cuales la función no es continua y gráfica la función.

10.-$f(x) = x^2 - 2x + 1$

11.- $f(x) = 3x - cosx$

12.- $f(x) = \frac{x}{x^2 - x}$

13.- $f(x) = \frac{|x+2|}{x+2}$

14.- $f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 1 \\ x^2, & x > 1 \end{cases}$

15.- $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + 1, & x \leq 2 \\ 3 - x & x > 2 \end{cases}$

IV Determinar el intervalo de continuidad de cada una de las siguientes funciones y su gráfica.

16.-$f(x) = \frac{1}{x-2}$ $sol: Discontinuidad\ infinita\ en\ x = 2$

17.-$g(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$ $sol: Discontinuidad\ de\ salto\ finito\ en\ x = 0$

18.-$f(x) = \sqrt{2x - 3} + 2x^2$ $sol: Continuidad\ \left[\frac{3}{2}, +\infty\right]$

19.-$f(x) = \sqrt{12 - 3x}$ $sol: Continuidad\ (-\infty, 4]$

20.-$f(x) = \frac{3}{9 - x^2}$ $sol: Discontinuidad\ infinita\ en\ x = \pm 3$

21.-$f(x) = \frac{x}{x-3}$ $sol: Discontinuidad\ infinita\ en\ x = 3$

22.-$f(x) = \frac{3x^2}{x-2}$ $sol: Discontinuidad\ infinita\ en\ x = 2$

23.-$f(x) = \frac{x}{2}$ $sol: Continuidad\ (-\infty, +\infty)$

24.-$f(x) = 6 + \sqrt{8x-2}$ $sol: Continuidad\ \left[\frac{1}{4}, +\infty\right)$

25.-$f(x) = \frac{x}{x^2-x}$ $sol: Continuidad\ (-\infty, 0) \cup (0,1) \cup (1, +\infty)$

Unidad 2: Derivada de funciones Algebraicas
Competencia particular 2: Resuelve problemas referentes a la derivada de funciones algebraicas en situaciones de su entorno académico, social y global

RAP 1

OBTIENE DERIVADAS DE FUNCIONES ALGEBRAICAS A PARTIR DE SU FUNCIÓN Y USO DEL FORMULARIO, EN SITUACIONES ACADÉMICAS

LA FUNCIÓN DERIVADA

INCREMENTOS

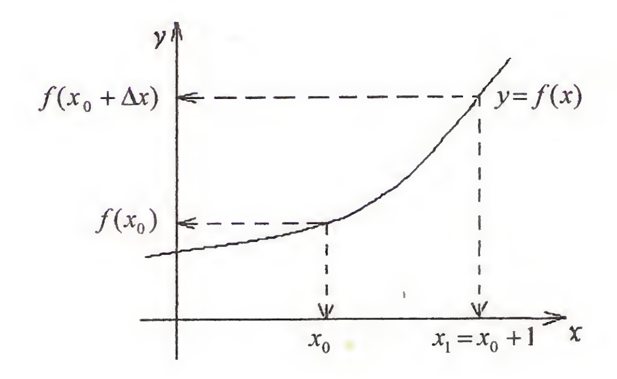
El incremento Δx de una variable x es el aumento o disminución que experimenta dicha variable, desde un valor $x = x_0$ a otro $x = x_1$. Así,

$$\Delta x = x_1 - x_0 \text{ ó bien } x_1 = x_0 + \Delta x$$

Si se da un incremento Δx a la variable x (es decir si x pasa de $x = x_0$ a $x = x_0 + \Delta x$), la función

y= $f(x)$ se verá incrementada en

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \text{ a partir del valor } y = f(x_0).$$



Ejemplo 1. Cuando x aumenta en Δx= 0.5 a partir de x_0 =1, la función $y = f(x) = x^2 + 2x$ se incrementa en

$$\Delta y = f(1 + 0.5) - f(1) = [(1.5)^2 + 2(1.5)] - [(1)^2 + 2(1)]$$

$$\Delta y = 5.25 - 3 = 2.25$$

Ejercicio. Si x se incrementa en Δx = -0.1 a partir de x_0 =4. ¿Cuál será el incremento que sufre la función $y = f(x) = x + 3$?

LA DERIVADA COMO PENDIENTE DE UNA CURVA

Son tres los objetivos sobre los cuales nos centraremos en esta sección:

1. Definir la pendiente de una curva.
2. Definir la derivada y usarla para calcular la pendiente de una curva.
3. Calcular la derivada por su definición como límite.

El cálculo diferencial consiste simplemente en calcular algebraicamente el límite de un cociente. Eso nos proporciona la pendiente de la recta tangente que estamos buscando.

Se sabe que la pendiente viene dada por

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{incremento\ en\ y}{incremento\ en\ x},$$

Si; (x_1, y_1) y (x_2, y_2) son dos puntos cualesquiera de la recta.

En general para una curva no lineal la pendiente no es constante, si no que varía de un punto a otro.

Para hallar la pendiente de una curva en algún punto, se hace uso de la recta tangente a la curva en el punto en cuestión.

Por ejemplo, en la **figura 1**, la recta tangente de la gráfica de f en p es la recta que mejor se aproxima a la gráfica de f en tal punto. El problema es hallar la pendiente a una curva en un punto se convierte así, en el de calcular la pendiente de la recta tangente a la curva en dicho punto.

No es este el caso de la figura 1, como se aprecia en la parte punteada de la recta tangente. De un modo informal, cuando nos referimos a la recta tangente a una curva, entendemos una tangente **local** a la curva en un punto concreto, sin que nos interese el que la recta y la curva se corten en algún otro punto.

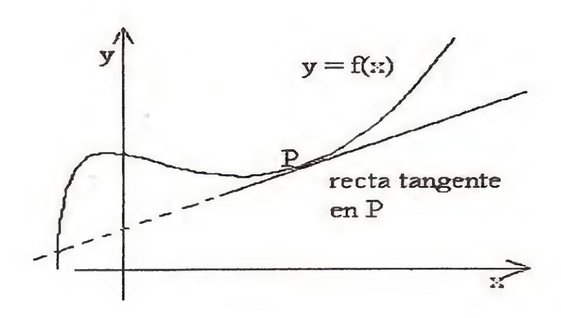


Figura 1

Podemos hallar la recta tangente en un punto de la forma siguiente. Considérese la recta tangente que pasa por los puntos **P** y **Q** de la gráfica de la función $y = f(x)$ en la figura 2.

Supóngase que el punto **Q** se mueve hacia el **P** sobre la curva, definiendo rectas **secantes** desde **P** hasta **Q**, por ejemplo: la recta secante que pasa por **P** y $\mathbf{Q_1}$, la recta secante que pasa por **P** y $\mathbf{Q_2}$ y así sucesivamente. Conforme **Q** queda más y más cerca de **P** nótese como estas rectas secantes tienden a una **posición límite**. Esta posición límite de las restas secantes es denominada **recta tangente** a la curva en el punto **P**.

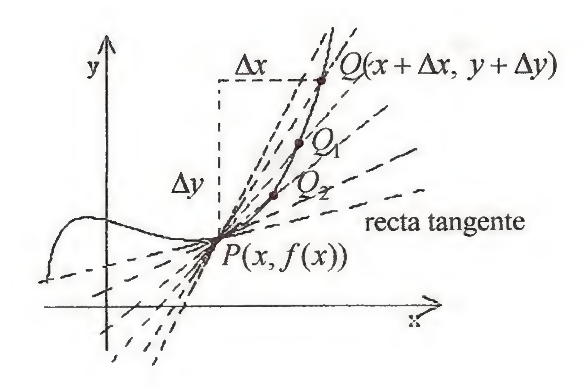


Figura 2

Podemos hallar la recta tangente en **P** calculando su pendiente. Dado que la recta tangente es la posición límite de las rectas secantes, su pendiente m_t es el valor límite de las pendientes m_s de las rectas secantes al aproximarse **Q** a **P**,

$$m_t = \lim_{Q \to P} m_s$$

De la figura 2, la pendiente de la recta secante por **Q** y **P** es

$$m_s = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Cuando $Q \to P$ tenemos que $\Delta x \to 0$. Por lo tanto, la **pendiente** de la **recta tangente** en **P** es

$$m_t = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Ahora se puede definir la pendiente a una curva en uno de sus puntos.

Definición. En $(x, f(x))$ la pendiente **m** de la gráfica de $y = f(x)$ es igual a la pendiente de su recta tangente en $(x, f(x))$ y queda determinada por

$$m = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Si este límite existe.

Para calcular la pendiente de la tangente a una curva mediante su definición por el límite:

Definición

La derivada de una función *f* es otra función *f´* cuyo valor para un número cualquiera *c* es

$$f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c + h) - f(c)}{h}$$

Una vez que dicho límite exista.

Ejemplo 2.

a) Hallar la fórmula que proporcione la pendiente de la gráfica $y = 3 - x^2$ en cualquier punto.
b) ¿Cuál es la pendiente en (0,3) y en (-2,-1)?

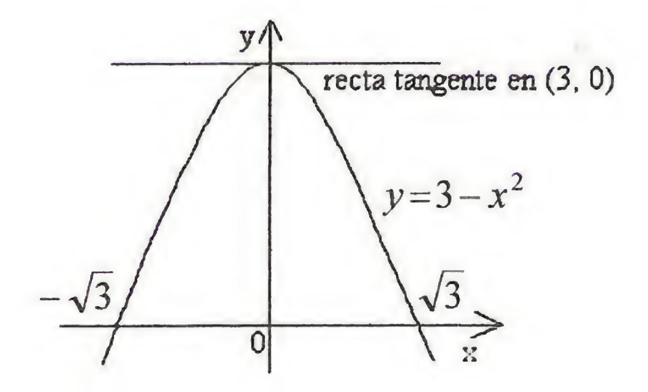
Solución. Aplicando la definición de derivada.

1. $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{\Delta x} = \lim_{h\to 0}(-2x-h) = -2x$

Así, $m = 2x$.

Para el punto (0,3); $m = -2(-2) = 4$

Así, la gráfica de la función $y = 3 - x^2$ tiene pendiente $m = 0$ en el punto (0,3), etc.



Ejemplo 3. Hallar la pendiente de la recta tangente a $f(x) = 2x - 3$ en cualquier punto.

Solución. Aplicando la regla de los cuatro pasos:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} 2$$

Por lo tanto $m = 2$ es la pendiente de la gráfica de la función $f(x) = 2x - 3$ en cualquier punto.

Ahora nos encontramos en un punto crucial en el estudio del cálculo, pues el límite

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Se usa para definir una de conceptos fundamentales del cálculo.

DEFINICIÓN DE LA DERIVADA DE UNA FUNCIÓN

El límite $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ se llama derivada de f en x (si el límite existe) y se denota por:

$\frac{df}{dx}$ *o* $f'(x)$(Que se lee "f prima de x"

Una función es **derivable** o **diferenciable** en x, si existe su **derivada** en x, llamándose **derivación** al procedimiento para calcular la derivada. La derivada de una función también es una función.

Las notaciones que se usan más comúnmente para denotar la derivada de una función son:

$$\frac{dy}{dx}, \quad y', \quad \frac{d}{dx}[f(x)], \quad \frac{df(x)}{dx}, \quad D_x f, \quad D_x y, \quad f'(x).$$

$\frac{dy}{dx}$ se lee la derivada de y con respecto a x.

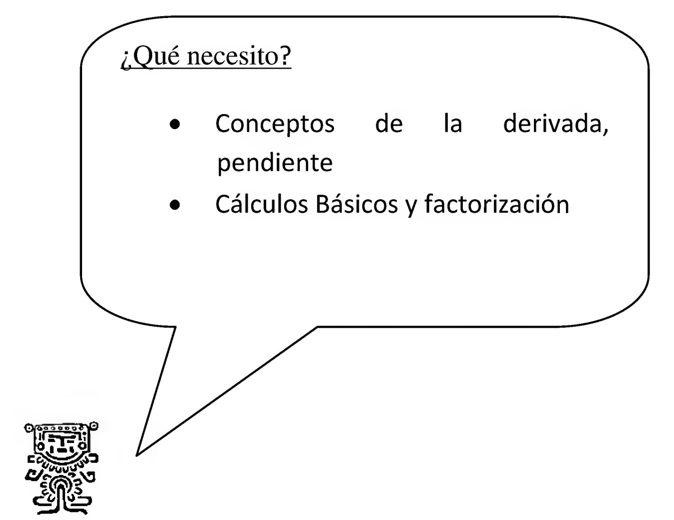
y'se lee "y prima" y denota la derivada de y respecto de la variable x.

De forma similar se leen las otras notaciones.

Introducida esta notación, entonces $\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$, y si $y=f(x)$:

$$y'=\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{df(x)}{dx}=f'(x).$$

Puesto que la derivada $f'(x)$ y la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f están ambas definidas por el límite $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, calcular $f'(x)$.



EJERCICIOS. Determina la derivada de las funciones siguientes mediante la regla de los cuatro pasos.

EJERCICIOS. Determina la derivada de las funciones	
Ejercicios	Respuestas
1. $f(x) = 3$	0
2. $f(x) = -5x$	-5
3. $f(x) = 3x + 2$	3
4. $f(x) = 1 - x^2$	-2x
5. $f(x) = 2x^2 + x - 1$	4x+1
6. $f(x) = \sqrt{x}$	$\frac{1}{1/(2\sqrt{x-4})}$
7. $f(x) = \frac{1}{x-1}$	$\frac{-1}{(x-1)^2}$
8. $f(x) = \frac{1}{x^2}$	$\frac{-2}{x^3}$

Determinar la derivada de cada función, representar la gráfica de cada función y hallar la ecuación de la recta tangente en el punto dado	
$f(x) = x^2 + 1; (2,5)$	Tangente $y = 4x - 3$

$f(x) = x^3; (2, 8)$ $f(x) = \sqrt{x+1}; (3, 2)$ $f(x) = \frac{1}{x}; (1, 1)$	Tangente $y = 12x - 16$ Tangente $4y = x + 5$ Tangente $y = -x + 2$
Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva $y = x^3$ y paralela a la recta $3x - y + 1 = 0$	$y = 3x - 2;\ y = 3x + 2$
Existen dos rectas tangentes a la curva $y = 4x - x^2$ que pasan por el punto (2, 5). Hallar las ecuaciones de tales rectas y representarlas gráficamente.	$y = 2x + 1;\ y = -2x + 9.$
Hallar la ecuación de 1 recta tangente a la curva $y = 1/\sqrt{x}$ y paralela a la recta $x + 2y - 6 = 0$	**RETO**

DERIVADA DE FUNCIONES ALGEBRAICAS

A continuación se desarrolla **la Regla de la cadena.** Si $y = f(u)$ es una función diferenciable de u y $u = g(x)$ es una función diferenciable de x, $y = f(g(x))$ es una función diferenciable de x, es decir

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

o en forma equivalente

$$\frac{d}{dx}[f(g(x))] = f'(u)g'(x).$$

REGLAS DE DERIVACIÓN

En las funciones siguientes: u, v y w son funciones derivables de x.

1. $\frac{d}{dx}(c) = 0$, c =constante.
2. $\frac{d}{dx}(x) = 1$
3. $\frac{d}{dx}(u + v) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$
4. $\frac{d}{dx}(cu) = c\frac{du}{dx}$
5. $\frac{d}{dx}(uv) = u\left[\frac{dv}{dx}\right] + \left[\frac{du}{dx}\right]v$
6. $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}, v \neq 0$
7. $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$
8. $\frac{d}{dx}(u^n) = nu^{n-1}\frac{d}{dx}(u)$



EJEMPLOS	
Calcular la derivada de la función $f(x) = 5$	La regla o fórmula que empleamos es $\frac{d}{dx}(c) = 0$, puesto que, en este ejemplo la función es una constante, es decir $c = 5$. Por lo tanto $\frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}5 = 0$
Calcular la derivada de $y = x$	La regla a emplear es $\frac{d}{dx}(x) = 1$. Ya que y=x, $\frac{d}{dx}(y) = \frac{d}{dx}(x) = 1$. Por lo tanto la derivada de $y = x$ es $y' = 1$.

Calcular la derivada de $f(x) = x^2$.	Emplearemos la formula $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$, en la función $f(x) = x^2, n = 2$ así la derivada es $\frac{d}{dx}(x^2) = 2x^{2-1} = 2x$, por lo tanto, la derivada de la función $f(x) = x^2$ es $f'(x) = 2x$.
Calcular la derivada de $f(x) = x^{-\frac{4}{3}}$.	. $\frac{d}{dx}\left(x^{-\frac{4}{3}}\right) = \left(-\frac{4}{3}\right)x^{-\frac{4}{3}-\frac{3}{3}} = -\frac{4}{3}x^{-\frac{7}{3}}$
calcular la derivada $y = \frac{1}{\sqrt{x^2+3x}}$	para poder emplear la fórmula 8, $\frac{d}{dx}u^n = nu^{n-1}\frac{d}{dx}(u)$, expresemos primeramente la función, $y = \frac{1}{\sqrt{x^2+3x}}$, en la siguiente forma $$y = \frac{1}{(x^2+3x)^{\frac{1}{2}}} = (x^2+3x)^{-\frac{1}{2}}$$ Aquí n= ½ y u=(x^2+3x), entonces $$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^2+3x)^{-\frac{1}{2}} = \left(-\frac{1}{2}\right)(x^2+3x)^{-\frac{1}{2}-1}\frac{d}{dx}(x^2+3x) - \frac{d}{dx}(x^2+3x)$$ $$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} \left(-\frac{1}{2}\right)(x^2+3x)^{-\frac{3}{2}}(2\mathrm{x}+3) = \frac{-(2\mathrm{x}+3)}{2(\mathrm{x}^2+3)^{\frac{3}{2}}}$$
Calcular la derivada de la siguiente función $y = \frac{x^2+3x}{x+1}$	empleando la fórmula $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{du}{dv} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$, donde u=$x^2+3x$ y v= $x+1$, sustituyendo tenemos $$y' = \frac{d}{dx}\left(\frac{x^2+3x}{x+1}\right) = \frac{(x+1)\,\frac{d}{dv}(x^2+3x) - (x^2+3x)\frac{d}{dx}(x+1)}{(x+1)^2}$$ $$y' = \frac{(x+1)(2x+3\,-)(x^2+3x(1)}{(x+1)^2} = \frac{2x^2+2x+3x+3-x^2-3x}{(x+1)^2}$$ $$y' = \frac{x^2+2x+3}{(x+1)^2}$$

¿Qué necesito?

- Concepto de la derivada
- Reglas de derivación
- Factorización
- Operatividad





Hallar la primera derivada de las siguientes funciones

1. $y = (2x + 7)^3$	$6(2x + 7)^2$
2. $f(x) = (3x^2 + 1)^4$	$24x(3x^2 + 1)^3$
3. $y = \frac{1}{x-2}$	$\dfrac{-1}{(x-2)^2}$
4. $f(t) = \left(\frac{1}{t-3}\right)^2$	-2/$(t - 3)^3$
5. $f(x) = \frac{3}{x^3-4}$	$\dfrac{-9x^2}{(x^3-4)^2}$
6. $y = x^2(x-2)^4$	$2x(x-2)^3(3x-2)$
7. $y = (x-2)(x+3)^3$	$(x+3)^2(4x+3)$
8. $f(x) = \frac{3}{x^3-4}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{t+1}}$
9. $s(t) = \sqrt{t^2 + 2t - 1}$	$\dfrac{t+1}{\sqrt{t^2+2t-1}}$
10. $y = \sqrt[3]{9x^2 + 4}$	$\dfrac{6x}{(9x^2+4)^{\frac{3}{2}}}$
11. $y = 2\sqrt{x^2 - 4}$	$\dfrac{2x}{\sqrt{x^2-4}}$
12. $f(x) = (x^2 - 9)^{\frac{2}{3}}$	$\dfrac{4x}{3(x^2-9)^{\frac{1}{3}}}$
13. $g(x) = \frac{3}{\sqrt[3]{x^3-1}}$	$\dfrac{-3x^2}{(x^3+1)^{\frac{4}{2}}}$
14. $g(x) = \frac{2x}{\sqrt{x+1}}$	

	$\frac{x+2}{(x+1)^{\frac{3}{2}}}$
Un líquido fluye por un agujero en el fondo de un depósito a una velocidad *v* dada por $v=\sqrt{2gh}$, donde g es la aceleración de la gravedad (32 $pies/s^2$) y h es la profundidad del líquido en el depósito. Hallar la razón de cambio de *v* respecto a h cuando: h=9 y h=4.	**RETO**

RAP 2

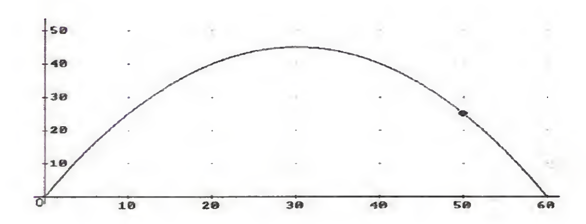
APLICA LA DERIVADA EN SITUACIONES GEOMÉTRICAS Y FÍSICAS, EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS, DE SU ENTORNO ACADÉMICO

LA DERIVADA COMO RAZÒN DE CAMBIO

Ya se ha visto que la derivada $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ se puede interpretar como la pendiente de una curva.

Existen númerosas aplicaciones de la noción de razón de cambio. Por ejemplo: el índice de crecimiento de una población la tasa (razón de cambio) de desempleo, la tasa de producción, tasa de mortandad, tasa de nacimientos, etc. Las razones de cambio más útiles son las relacionadas con el tiempo, sin embargo, empezaremos investigando la razón de cambio respecto de cualquier variable.

Supóngase que se lanza una pelota al aire de forma que la ecuación que describa su trayectoria es $y = -\frac{x^2}{20} + 3x$



Por lo que ahora el cambio que manifiesta la altura de la pelota al cambiar su distancia horizontal alejándose respecto del origen. Es decir, la razón de cambio de la altura y de la pelota conforme crece la distancia horizontal x.

Por ejemplo, si la pelota se ha alejado horizontalmente y se encuentra en $x = 40$ la altura correspondiente de la pelota para este valor de la variable independiente es $y = 40$, mientras que en $x = 50$ la altura de la pelota es $y = 25$.

Así, el cociente de los incrementos (razón de cambio promedio) de y al pasar de $x = 40$ a $x = 50$ es

$$\frac{Cambio\ en\ y}{Cambio\ en\ x} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{25 - 40}{50 - 40} = -1.5$$

En el intervalo que va de $x = 25$ a $x = 30$ el cociente de incrementos está dado por

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{45 - 43.75}{30 - 25} = \frac{1.75}{5} = 0.35$$

En general la razón de cambio promedio de y respecto a x esta dada por

$$\frac{cambio\ en\ y}{cambio\ en\ x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Si lo que nos interesa es la razón de cambio exacta de y para un valor particular de x. Por ejemplo, cuando $x = 50$, ¿A qué razón está cambiando y por cada unidad de cambio en x? Esta razón de cambio de y en un valor particular de x se llama razón de cambio instantánea de y espeto de x. La razón de cambio instantánea se calcula haciendo tender Δx a 0.

Definición. La razón de cambio instantánea de y con respecto de x está dada por

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Esta es la segunda interpretación fundamental de la derivada: como una razón de cambio instantánea de una variable respecto a la otra.

Resulta útil recordar que derivada, pendiente de una gráfica y razón de cambio son todas equivalentes. Es usual mencionar razón de cambio para referirse a la razón de cambio instantánea y en lo sucesivo así lo haremos.

Ejemplo 1. Se lanza una pelota que sigue la trayectoria descrita por $y = x - 0.02x^2$.

a) Representar la gráfica de la trayectoria.
b) Hallar la distancia horizontal total que recorre la pelota.
c) ¿Para qué valor de x alcanza la pelota su altura máxima? (Usar la simetría de la trayectoria).
d) Hallar la ecuación que expresa la razón de cambio instantáneo de la altura de la pelota respecto del cambio horizontal. Resolver la ecuación en $x = 10, 30$.
e) ¿Cuál es la razón de cambio instantáneo de la altura cuando la pelota alcanza su altura máxima?

Solución

a) La gráfica de $y = x - 0.02x^2$ corresponde a una parábola que abre hacia abajo (por el signo negativo en el término cuadrático).

Factorizando e igualando a cero para determinar las raíces

$$y = x(1 - 0.02x)$$

$$x(1 - 0.02x) = 0,$$

igualando ahora cada factor con cero

$$x_1 = 0$$

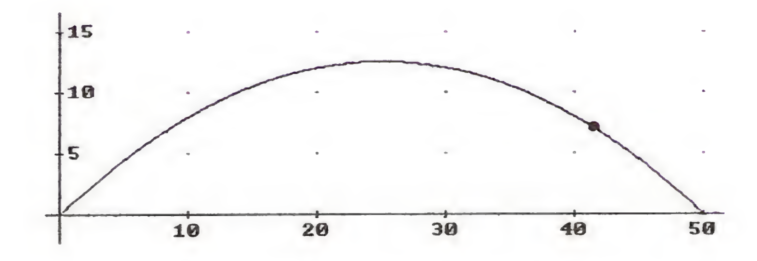
$$1 - 0.02x_2 = 0,$$

despejando x_2 de esta última ecuación tenemos

$$x_2 = 50.$$

Así, la gráfica de la trayectoria de la pelota es una parábola que abre hacia abajo, corta al eje horizontal en $x = 0$ y $x = 50$, y por simetría su vértice está localizado en el punto $v(25, f(25))$, resta sólo calcular $f(25)$.

$$f(25) = 25 - 0.02(25)^2 = 12.5$$



b) La distancia horizontal total recorrida está dada por el punto de impacto y que corresponde al valor $x_2 = 50$.

c) Por simetría, la altura máxima la alcanza en $x = 25$, siendo esta altura $f(25) = 12.5$.

d) La ecuación que expresa la razón de cambio instantáneo de la altura de la pelota respecto al cambio horizontal, como sabemos está dada por la derivada de y respecto de x,

$$\frac{dy}{dx} = 1 - 0.04x.$$

Así, las correspondientes razones de cambio solicitadas son:

$$\frac{dy}{dx} = 1 - 0.04(10) = 1 - 0.4 = 0.6$$

$$\frac{dy}{dx} = 1 - 0.04(30) = 1 - 1.2 = -0.2$$

e) La razón de cambio instantánea en la altura máxima tiene lugar cuando $x = 25$ siendo ésta

$$\frac{dy}{dx} = 1 - 0.04(25) = 0.$$

EJERCICIOS

Hallar el cociente de incrementos de cada una de las funciones entre los puntos dados. Comparar este cociente de incrementos con la razón de cambio instantáneo de cada punto.

$f(t) = 2t + 7$	$(1,9), (2,11)$
$f(t) = \frac{1}{t+1}$	$(0, 1), \quad (3, 1/4)$
$h(s) = s^2 - 6s - 1$	$(-1,6), (3, -10)$
$h(t) = \sqrt{t^2 - 16};$	$(4, 0), (5, 3)$
1. El área de un cuadrado de lados de longitud l es $A = l^2$. Hallar la razón de cambio del área respecto de l cuando $l = 4$.	RETO

DERIVADA DE ORDEN SUPERIOR

La derivada de una función de x por ejemplo $y = f(x)$, recibe el nombre de **primera** derivada de la función. Si la primera derivada es a su vez una función derivable, su derivada se denomina **segunda** derivada de la función original y se representa, por cualquiera de los símbolos

$$\frac{d^2y}{dx^2}, y'' \text{ ó } f''(x),$$

La derivada de esta segunda derivada, si existe es la **tercera** derivada de la función y se representa por

$$\frac{d^3y}{dx^3}, y''' \text{ ó } f'''(x),$$

y así sucesivamente

$$\frac{d^4y}{dx^4}, y^{IV} \text{ ó } f^{IV}(x) \text{ etc.}$$



Ejemplos	
Calcular la **primera** y **segunda** derivada de la siguiente función $y = x^3 + x + 5$.	$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^3 + x + 5) = \frac{d}{dx}(x^3) + \frac{d}{dx}(x) + \frac{d}{dx}(5)$, así la primera derivada de la función es $y' = 3x^2 + 1$, y la segunda derivada es $y'' = \frac{d}{dx}(3x^2 + 1) = \frac{d}{dx}(3x^2) + \frac{d}{dx}(1) = 6x.$
Calcular la segunda derivada con respecto a la variable r de la función $v = \frac{4}{3}\pi r^3$.	Primera derivada $v' = 8\pi$r.

Ahora bien la velocidad media expresa la razón de cambio de y respecto de t en un intervalo de tiempo Δt. La razón de cambio de y respecto a t en un instante determinado se llama velocidad instantánea del objeto o simplemente velocidad v en el instante t, y queda definida por

$$v(t) = velocidad = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = s'(t).$$

La aceleración estaría entonces dada por la primera derivada de la velocidad con respecto del tiempo o por la segunda derivada de la posición respecto del tiempo.

Rapidez es el valor absoluto de la velocidad.

$$a(t) = v'(t) = s''(t)$$

En general la posición de un objeto que se mueve libremente (despreciando la resistencia del aire) bajo la influencia de la gravedad se puede expresar por la ecuación

$$s(t) = \frac{1}{2}gt^2 + V_0 t + S_0$$

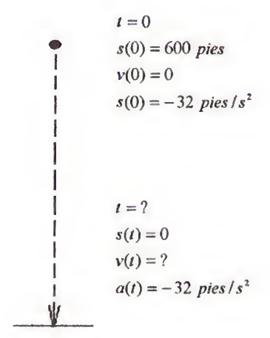
donde: s_0 es la altura inicial del objeto, es decir la altura del objeto en el instante $t = 0$; V_0 la velocidad inicial del objeto, es decir la velocidad del objeto en el instante $t = 0$; y g =32

pies /s^2 representa la magnitud de la aceleración debida a la fuerza de gravedad que la tierra ejerce sobre el objeto y que para problemas de caída libre y tiro parabólico (trayectorias descritas por una ecuación de segundo gratado) pondremos $a = -g$, ya que esta fuerza va en dirección contraria al crecimiento de las ordenadas. Convencionalmente la velocidad hacia arriba se considera positiva.



Ejemplos	
Se dispara un proyectil directamente hacia arriba desde la superficie de la tierra con una velocidad inicial de $V_0 = 384$ pies/s. a) Determinar la ecuación de posición para el movimiento del proyectil. b) Hallar la velocidad media en el intervalo de $t = 5$ a $t = 10$ segundos.	a) Sustitución en la ecuación de movimiento la posición inicial $s_0 = s(0) = 0$, la velocidad inicial $V_0 = v(0) = 384$ pies/s y la gravedad $g = 32$ pies/s^2, obtenemos la ecuación que describe el movimiento del proyectil. $s(t) = 16t^2 + 384t$. b) La velocidad media entre $t = 5$ a $t = 10$ segundos es

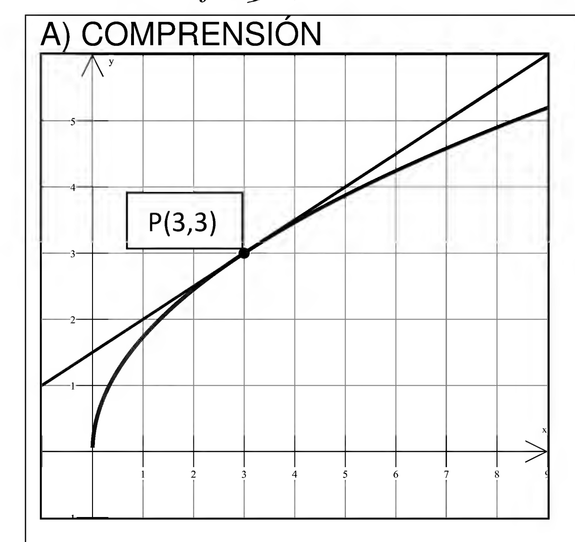
c) Hallar la velocidad instantánea en $t = 5$ y $t = 10$ segundos. d) Hallar la altura máxima que alcanza el proyectil.	$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(10) - s(5)}{10 - 5} = -\frac{-16(10)^2 + 384(10) + 16(5)^2 -}{5}$ $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{-1600 + 3840 + 400 - 1920}{5} = -\frac{720}{5} = 144\frac{pies}{s}.$ c) Derivando la ecuación de movimiento, vemos que la ecuación que describe la velocidad del proyectil es $v(t) = s'(t) = -32t + 384,$ Así, las velocidades instantáneas respectivas para $t = 5$ y $t = 10$ segundos son $v(5) = -32(5) + 384 = 224\ pies$ $v(10) = -32(10) + 384 = 64\ pies$ d) Justo en el instante en el que el proyectil deja de subir para empezar a caer, la altura alcanzada es máxima, y en ese instante la velocidad del proyectil es cero. Por tanto, debemos determinar en qué momento la velocidad es igual a cero. $v(t) = -32t + 384 = 0$ $32t = 384$ $t = 12\ seg.$ Calculemos ahora la altura (máxima) del proyectil a los 12 segundos.

Se deja caer una piedra desde una altura de 600 pies. Hallar la velocidad instantánea de la piedra cuando alcanza el suelo	La figura muestra en forma explícita las condiciones iniciales del problema, aplicando estas condiciones a la ecuación de movimiento de un objeto en caída libre en el instante $t = 0$, tenemos $$0 = -\frac{1}{2}gt^2 + (0)t + 600.$$  Despejemos ahora la variable t para conocer el tiempo que transcurre desde el momento en que se suelta la piedra y el impacto en el suelo. $$\frac{1}{2}gt^2 = 600$$ $$t^2 = \frac{1200}{32}$$ $$t = \pm 6.1237.$$ Sustituyendo $t = 6.1237$ y $v_0 = 0$ en la expresión $v(t) = -gt + v_0$ para conocer la velocidad ene l momento de impacto, tenemos que $v = -(32)(6.1237) + 0$ $$v = -195.9584 \text{ pies/s.}$$ Ayuda: $A = 4\pi r^2$ $v = \frac{4}{3}\pi r^3$ Solución: 40 cm^2/s

RECTA TANGENTE Y NORMAL.

1.- HALLAR LA ECUACIÓN DE LA RECTA TANGENTE Y NORMAL A LA FUNCIÓN $f(x)=\sqrt{3x}$ EN EL PUNTO $P(3,3)$

A) COMPRENSIÓN



B) PLANTEO

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3}{2\sqrt{3x}}$$

$$\frac{dy}{dx}=m_{\tan gente}$$

$$m_{(3,3)}=\frac{3}{2\sqrt{3(3)}}$$

$$m_{(3,3)}=\frac{1}{2}$$

C) ECUACIÓN DE LA RECTA TANGENTE.

$m=\frac{1}{2}$ $\quad P(3,3)$

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

$$y-3=\frac{1}{2}(x-3)$$

$$2(y-3)=x-3$$

$$2y-6=x-3$$

ECUACIÓN DE LA RECTA TANGENTE.

$$x-2y+3=0$$

ECUACIÓN DE LA RECTA NORMAL

$m=-2$ $\quad P(3,3)$

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

$$y-3=-2(x-3)$$

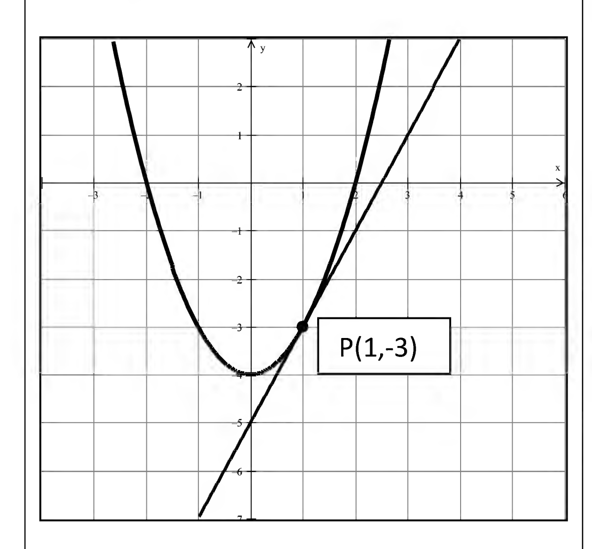
$$y-3=-2x+6$$

ECUACIÓN DE LA RECTA NORMAL

$$2x+y-9=0$$

2.- HALLAR LA ECUACIÓN DE LA RECTA TANGENTE Y NORMAL A LA FUNCIÓN $f(x)=x^2-4$ EN EL PUNTO $P(1,-3)$

A) COMPRENSIÓN



B) PLANTEO

$$\frac{dy}{dx}=2x$$

$$\frac{dy}{dx}=m_{\tan gente}$$

$$m_{(1,-3)}=2(1)$$

$$m_{(1,-3)}=2$$

C) ECUACIÓN DE LA RECTA TANGENTE.

$m=2$ $\quad$ $P(1,-3)$

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

$$y+3=2(x-1)$$

$$y+3=2x-2$$

ECUACIÓN DE LA RECTA TANGENTE

$$2x-y-5=0$$

ECUACIÓN DE LA RECTA NORMAL

$m=-\frac{1}{2}$ $\quad$ $P(1,-3)$

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

$$y+3=-\frac{1}{2}(x+1)$$

$$2(y+3)=-x-1$$

$$2(y+3)=-x-1$$

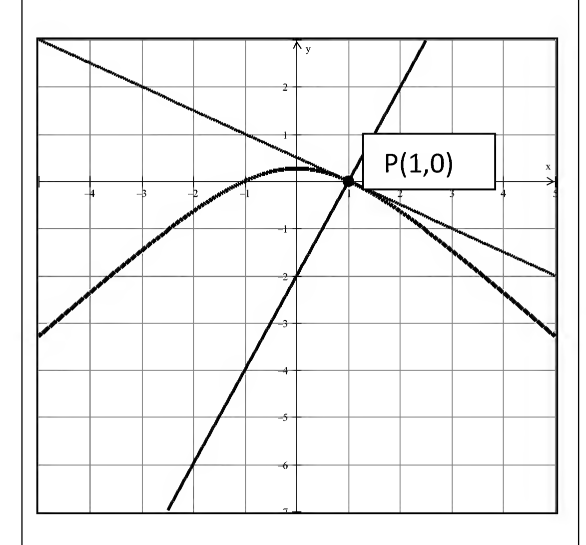
$$2y+6=-x-1$$

ECUACIÓN DE LA RECTA NORMAL

$$x+2y+7=0$$

3.- HALLAR LA ECUACIÓN DE LA RECTA TANGENTE Y NORMAL A LA FUNCIÓN $f(x)=2-\sqrt{x^2+3}$ EN EL PUNTO $P(1,0)$

A) COMPRENSIÓN



B) PLANTEO

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{\sqrt{x^2+3}}$$

$$\frac{dy}{dx}=m_{\tan gente}$$

$$m_{(1,0)}=-\frac{1}{\sqrt{1+3}}$$

$$m_{(1,0)}=-\frac{1}{2}$$

C) ECUACIÓN DE LA RECTA TANGENTE.

$m=-\frac{1}{2}$ $\qquad P(1,0)$

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

$$y=-\frac{1}{2}(x-1)$$

$$2y=-x+1$$

ECUACIÓN DE LA RECTA TANGENTE

$$y=-\frac{x+1}{2}$$

ECUACIÓN DE LA RECTA NORMAL

$m=2$ $\qquad P(1,0)$

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

$$y=2(x-1)$$

$$y=2x-2$$

$$2x-y-2=0$$

ECUACIÓN DE LA RECTA NORMAL

$$2x-y-2=0$$

DERIVACIÓN IMPLÍCITA

Hasta este momento las ecuaciones en dos variables se expresaron generalmente en la forma **explícita**.

$$y = f(x)$$

Una de las dos variables de ha dado explícitamente en términos de la otra, por ejemplo:

$$y = x^2 + 3x + 10$$

$$s = -3t + t^2$$

Sin embargo, muchas relaciones no están dadas explícitamente, estando determinadas por una expresión o ecuación como por ejemplo:

1. $3x^2 - y = 5$
2. $xy + x = 9$
3. $x^2 + y^2 = 4$
4. $x^2 + 2xy + y^2 = 25$

Decimos que tales ecuaciones están en forma implícita. De hecho, a veces se puede cambiar la forma de una ecuación implícita a explícita. Por ejemplo, al despejar y en la ecuación 1 se obtiene

$$y = 3x^2 - 5,$$

En la ecuación 2 tenemos $y = \frac{9-x}{x}$,

y a partir de la ecuación 3 podemos definir las funciones

$$y = +\sqrt{4 - x^2}, \qquad y = -\sqrt{4 - x^2}.$$

A veces se encuentran ecuaciones cuya conversión a la forma explícita es muy difícil o imposible, donde se puede emplear un procedimiento llamado derivación implícita.

Es este método derivamos simplemente cada término por separado en la ecuación dada, aplicando las reglas de derivación ya conocidas.

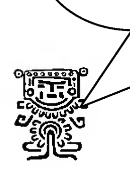


Ejemplos	
Hallar $\frac{dy}{dx}$ de $x^2 + y^2 = 4$ por derivación implícita y evaluarla en el punto $(1, \sqrt{3})$	Al derivar con respecto a x cada término obtenemos $$\frac{d}{dx}[x^2 + y^2] = \frac{d}{dx}[2]$$ $$2x + 2y\left[\frac{dy}{dx}\right] = 0$$ Observa el uso de la regla de la cadena al derivar el segundo término. Despejando ahora $\frac{dy}{dx}$ se obtiene $$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$$ Finalmente evaluando en el punto indicado $$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$
Calcular y' de la ecuación $x^2 + xy + y^2 = 16$.	Al derivar con respecto a x cada término y en particular aplicando la regla del producto en el segundo obtenemos $$2x + y + xy' + 2yy' = 0,$$ procediendo a despejar y' $$y'(x + 2y) = -2x - y$$ $$y' = -\frac{2x + y}{x + y}$$
Hallar las ecuaciones de la tangente y la normal a la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$ en el punto $(4, 3)$.	Derivando respecto de x cada uno de los términos de la ecuación de la circunferencia obtenemos $$2x + 2yy' = 0$$ $$y' = -\frac{x}{y}$$ evaluando para conocer los valores de las pendientes de las rectas tangentes y normal

	en el punto $(4,3)$ $m_t = y' = -\frac{4}{3},$ $m_n = -\frac{1}{m_t} = \frac{3}{4}.$ Ecuación de la tangente $y-3=-\frac{4}{3}(x-4)$. Ecuación de la normal $y-3=\frac{3}{4}(x-4)$.

¿Qué necesito?

- Conceptos de la derivada
- Reglas de derivación
- Derivación Implícita
- Factorización
- Operatividad



Utilizando derivación implícita calcular el valor de la derivada en el punto que se indica

$x^2+y^2=16; (3,\sqrt{7})$	$-3/\sqrt{7}$
$xy=4; (-4,-1)$	-1/4
$x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}=9; (16,25)$	-5/4
$x^3-xy+y^2=4; (0,-2)$	1/2

Las ecuaciones de dos variables que se han trabajado se pueden expresar en forma explícita $y=f(x)$ Esto es, una de las dos variables está dada explícitamente en términos de otra. Por ejemplo: $y=3x-5$ $u=3w-w^2$ $s=-16t^2+20t$.

Están dadas en forma explícita y decimos que $y, u, \; y \; s$. Son funciones de $x, w, \; y \; t$ respectivamente.

Estas ecuaciones a su vez se pueden escribir implícitamente, como se muestra:

$3x - y = 5 \qquad w^2 - 3w + u = 0 \qquad 16t^2 - 20t + s = 0$.

PROCEDIMIENTO PARA DERIVAR IMPLÍCITAMENTE.

1.-Derivar ambos lados de la ecuación respecto de x.

2.-Coleccionar todos los términos que contengan $\frac{dy}{dx}$ a la izquierda de la ecuación y todos los demás a la derecha.

3.-Factorizar $\frac{dy}{dx}$ en el lado izquierdo.

4.-Despejar $\frac{dy}{dx}$ dividiendo ambos lados de la ecuación entre el factor de la izquierda que no contiene $\frac{dy}{dx}$

EJEMPLO: DERIVACIÓN DE FUNCIONES IMPLÍCITAS.

1.- $y^3 + y^2 - 5y - x^2 = -4$

SOLUCIÓN:

$$\frac{d}{dx}\left(y^3 + y^2 - 5y - x^2\right) = \frac{d}{dx}(4)$$

$$\frac{d}{dx}\left(y^3\right) + \frac{d}{dx}\left(y^2\right) - \frac{d}{dx}(5y) - \frac{d}{dx}\left(x^2\right) = \frac{d}{dx}(4)$$

$$\frac{d}{dx}\left(y^3\right) + \frac{d}{dx}\left(y^2\right) - \frac{d}{dx}(5y) - \frac{d}{dx}\left(x^2\right) = \frac{d}{dx}(4)$$

$$3y^2\frac{dy}{dx} + 2y\frac{dy}{dx} - 5\frac{dy}{dx} - 2x = 0$$

$$3y^2\frac{dy}{dx} + 2y\frac{dy}{dx} - 5\frac{dy}{dx} = 2x$$

$$\frac{dy}{dx}\left(3y^2+2y-5\right)=2x$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2x}{3y^2+2y-5}$$

EJERCICIOS:

1.- Determinar la ecuación de la recta tangente y normal a la función $f(x)=\sqrt{5x}$ en el punto $P(5,5)$.

$$sol: f(x)_t=\frac{x}{2}+\frac{5}{2} \qquad f(x)_n=-2x+15$$

2.- Determinar la ecuación de la recta tangente y normal a la función $f(x)=x^2+1$ en el punto $P(-1,2)$.

$$sol: f(x)_t=-2x \qquad f(x)_n=\frac{x}{2}+\frac{5}{2}$$

3.- Determinar la ecuación de la recta tangente y normal a la función $f(x)=\sqrt{x}$ en el punto $P(4,2)$.

$$sol: f(x)_t=\frac{x}{4}+1 \qquad f(x)_n=-4x+18$$

4.- Determinar la ecuación de la recta tangente y normal a la función $f(x)=x^2+2$ en el punto $P(1,3)$.

$$sol: f(x)_t=2x+1 \qquad f(x)_n=-\frac{x}{2}+\frac{7}{2}$$

5.- Determinar la ecuación de la recta tangente y normal a la función $x^2-y^2=7$ en el punto $P(4,-3)$.

$$sol: y_t=-\frac{x}{6}-\frac{7}{3} \qquad y_n=6x-27$$

6.- Determinar la ecuación de la recta tangente y normal a la función $x^2+y \quad -4x-6y=12$ en el punto $P(-2,0)$.

$$sol: y_t=-\frac{4x}{3}-\frac{8}{3} \qquad y_n=\frac{3x}{4}+\frac{3}{2}$$

7.- Obtener la ecuación de la recta tangente y normal a la curva cuya ecuación es: $x^2+y^2=25$ en el punto $P(4,3)$.

$$sol: y_t=-\frac{4x}{3}+\frac{25}{3} \qquad y_n=\frac{3x}{4}$$

8.- Determinar la ecuación de la recta tangente y normal a la función $x^2 - y^2 = 7$ en el punto $P(4,3)$.

$$sol: y_t = \frac{4x}{3} - \frac{7}{3} \qquad y_n = -\frac{3x}{4} + 6$$

9.- Determinar la ecuación de la recta tangente y normal a la curva de ecuación $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 25$ en el punto $P(-2,5)$.

$$sol: y_t = \frac{3x}{4} + \frac{13}{2} \qquad y_n = -\frac{4x}{3} + \frac{7}{3}$$

10.- Determinar la ecuación de la recta tangente y normal a la curva de ecuación $(y-2)^2 = 4(x-1)$ en el punto $P(2,4)$.

$$sol: y_t = x + 2 \qquad y_n = -x + 6$$

11.- Determinar la ecuación de la recta tangente y normal a la curva de ecuación $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ en el punto $P\left(4, \frac{9}{5}\right)$.

$$sol: y_t = -\frac{4x}{5} + 5 \qquad y_n = \frac{5x}{4} + \frac{16}{5}$$

12.- Determinar la ecuación de la recta tangente y normal a la curva de ecuación $x^2 + y^2 + 2x + y = 10$ en el punto $P(2,1)$.

$$sol: y_t = -2x + 5 \qquad y_n = \frac{x}{2}$$

13.- Determinar la ecuación de la recta tangente y normal a la curva de ecuación $5x^2 + 5y^2 - 32x - 8y - 34 = 0$ en el punto $P(3,5)$.

$$sol: y_t = \frac{x}{21} + \frac{34}{7} \qquad y_n = -21x + 68$$

14.- Obtener la ecuación de la recta tangente y normal a la curva de ecuación $3x^2 + 3y^2 - 21x - 12y = 0$ en el punto $P(3,6)$.

$$sol: y_t = \frac{x}{8} + \frac{45}{8} \qquad y_n = -8x + 30$$

15.- Obtener la ecuación de la recta tangente y normal a la curva de ecuación $x^2 + y^2 = 8x - 4y$ en el punto $P(6,2,)$.

$$sol: y_t = -\frac{x}{2} + 5 \qquad y_n = 2x - 10$$

16.- Determinar la ecuación de la recta tangente y normal a la curva de ecuación $x^2 + y^2 = 25$ en el punto $P(3,4)$.

$$sol: y_t = -\frac{3x}{4} + \frac{25}{4} \qquad y_n = \frac{4x}{3}$$

RAP 3:

RESUELVE PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN QUE INVOLUCREN FUNCIONES ALGEBRAICAS, EN SITUACIONES ACADÉMICAS, SOCIALES Y GLOBALES

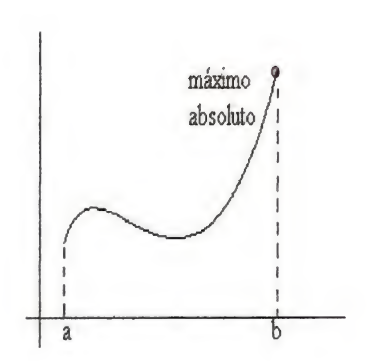
APLICACIONES DE LA DERIVADA.

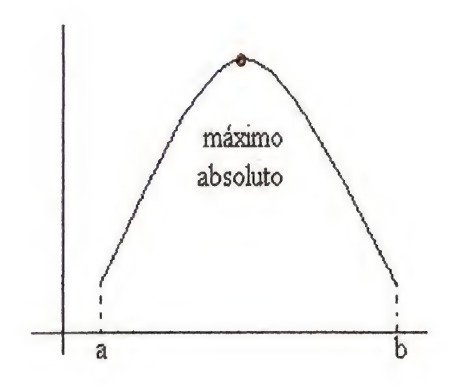
EXTREMOS ABSOLUTOS. Supongamos que una función f está definida en el intervalo $[a, b]$. los valores máximos y mínimos de f en $[a, b]$(si hay alguno) se llaman extremos de la función. Estos valores van a ser fundamentales en el estudio del comportamiento de una función por ello es necesario prestar atención a su significado y sobre todo presta especial atención a las gráficas que acompañan las definiciones y demostraciones que están presentes en esta sección.

Definición

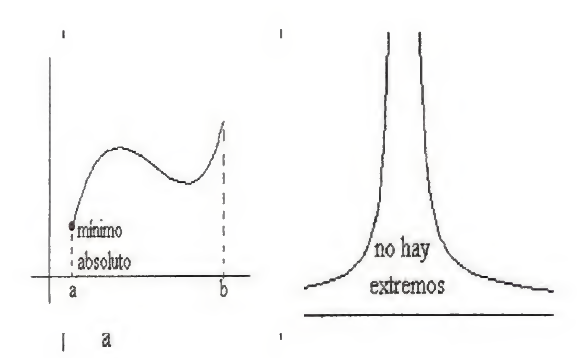
1. Un número $f(c)$ es un máximo absoluto de una función f, si $f(x) \leq f(c)$para toda x en el dominio de f.
2. Un número $f(c)$ es un mínimo absoluto de una función f, si $f(x) \geq f(c)$ para toda x en el dominio de f.

A continuación se muestran una serie de gráficas mostrando aspectos cualitativos de estas situaciones.







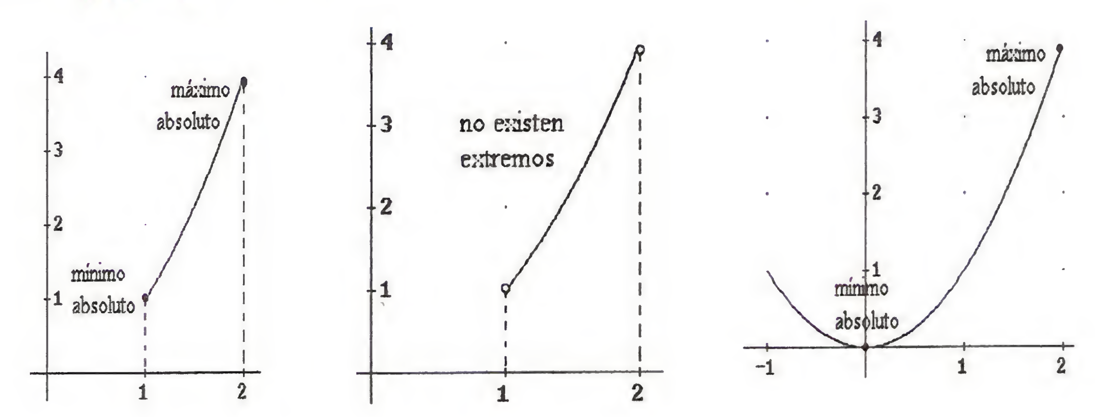


Ejemplo 1.

a) $f(x) = x^2$, definida en el intervalo cerrado $[1, 2]$, tiene máximo absoluto $f(2) = 4$ y el mínimo absoluto $f(1) = 1$.

b) $f(x) = x^2$, definida en el intervalo abierto$(1, 2)$, no tiene extremos absolutos.

c) $f(x) = x^2$, definida en $[-1, 2]$, tiene el máximo absoluto $f(2) = 4$ y el mínimo absoluto $f(0) = 0$.



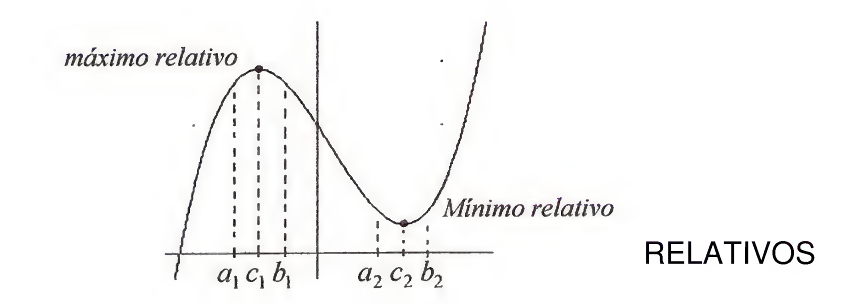
Teoremas de los valores extremos

Una función f continua en un intervalo cerrado $[a, b]$siempre tiene un máximo absoluto y un mínimo absoluto en el intervalo.

En otras palabras, cuando f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, existen números $f(c_1)$ y $f(c_2)$ tales que $f(c_1) \leq f(x) \leq f(c_2)$ para todo x en $[a, b]$. Cuando no se trata de un intervalo cerrado, entonces aun cuando f sea continua no hay garantía de que exista un extremo absoluto.

La función descrita en la siguiente figura no tiene extremos absolutos (en el supuesto de que la gráfica continúa al infinito en ambas direcciones). Sin embargo centremos la atención en los valores de x que están en la vecindad (alrededor y cerca) de los números c_1 y c_2, $f(c_1)$ es el valor máximo de la función en el intervalo (a_1, b_1) y $f(c_2)$ es el valor mínimo de la función en el intervalo (a_2, b_2).

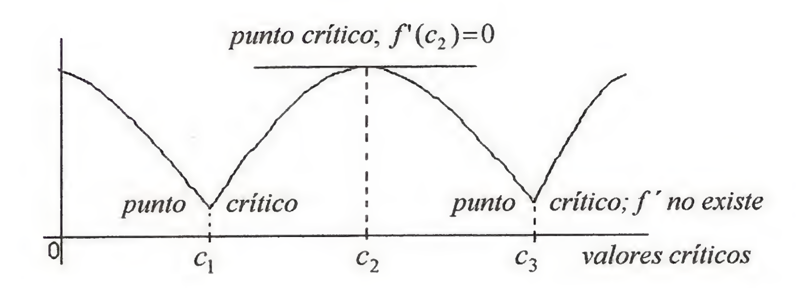
EXTREMOS RELATIVOS



Definición

1. Un número $f(c)$ es un máximo relativo de una función f, si $f(x) \leq f(c)$para toda x en algún intervalo abierto que contenga a c.
2. Un número $f(c)$ es un mínimo relativo de una función f, si $f(x) \geq f(c)$ para toda x en algún intervalo abierto que contenga a c.

Los valores de x en los que f' vale cero o no existe son importantes al estudiar el comportamiento de una función, ya que es ahí donde se presentarán los máximos y mínimos relativos, y por ello recibirán un nombre especial.

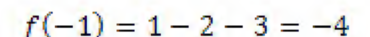
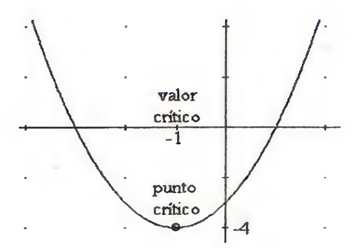
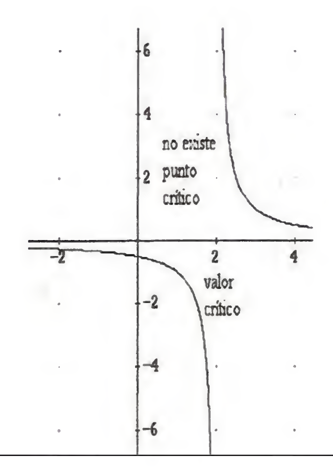


En la gráfica anterior se observa que en los valores c_1 y c_2 **no existe recta tangente** ¿Por qué? En consecuencia tampoco existe la derivada en estos puntos. En c_2 la primera derivada **vale cero** ya que la recta tangente **es paralela** al eje horizontal.

Definición. Si un número c está en el dominio de la función f, se llama valor crítico de f, si $f'(c) = 0$ o $f'(c)$ no existe. Los puntos de coordenadas $(c, f(c))$, sobre la gráfica de la función se llaman puntos críticos.



EJEMPLOS	
Hallar los valores críticos y los puntos críticos de la función $f(x) = x^2 + 2x - 3$.	La primera derivada de la función es $f'(x) = 2x + 2$, igualando esta última a cero obtenemos la ecuación $2x + 2 = 0$, resolviéndola tenemos que $x = -1$. Así, $x = -1$ es un valor crítico para la función dada. Al evaluar la función en $x = -1$ obtenemos la ordenada del punto crítico. $f(-1) = (-1)^2 + 2(-1) - 3$

	 $f(-1) = 1 - 2 - 3 = -4$ Por lo cual el punto crítico tiene coordenadas p (-1,-4). 
Hallar los valores críticos y puntos críticos de la función $f(x) = \frac{1}{x-2}$.	Observa que la función no está definida en $x = 2$. $$f'(2) = \frac{1}{2-2} = \frac{1}{0}$$ La primera derivada es $f'(x) = -\frac{1}{(x-2)^2}$ que también está indeterminada en $x = 2$. En consecuencia $x = 2$ es un valor crítico. Las coordenadas del punto crítico se obtiene al evaluar la función en $x = 2$, pero como la función no está definida en este valor no existe punto crítico. 

MÁXIMOS Y MÍNIMOS RELATIVOS.

1.- Dada la siguiente función $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 2$

Determinar:

a) Los valores críticos
b) En cual valor crítico se encuentra el máximo y en cual el mínimo.
c) Las coordenadas del punto máximo y del punto mínimo.
d) Las coordenadas del punto de inflexión.
e) La gráfica
f) Intervalo donde la función es cóncava hacia abajo y donde es cóncava hacia arriba.
g) Intervalo donde la función crece y decrece.

A) VALORES CRÍTICOS.

$$\frac{dy}{dx} = 6x^2 - 6x - 12$$

$$0 = 6x^2 - 6x - 12$$

$$0 = \frac{6x^2 - 6x - 12}{6}$$

$$0 = x^2 - x - 2$$

$x = 2 \qquad x = -1$

B) EN CUÁL VALOR CRÍTICO ESTÁ EL MÁXIMO Y EN CUÁL EL MÍNIMO.

$$f''(x) = 12x - 6$$

$$f''(2) = 12(2) - 6$$

$$f''(2) = 18$$

Cuando $x = 2$ la segunda derivada es positiva, por lo tanto en $x = 2$ la función es cóncava hacia arriba luego entonces hay un MÍNIMO.

$$f''(x) = 12x - 6$$

$$f''(-1) = 12(-1) - 6$$

$$f''(-1) = -18$$

Cuando. $x = -1$
la segunda derivada es negativa,
por lo tanto en $x = -1$
la función es cóncava hacia abajo luego entonces hay un MAXIMO.

C) PUNTO MÁXIMO.

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 2$$

$$f(-1) = 2(-1)^3 - 3(-1)^2 - 12(-1) + 2$$

$$f(-1) = 9$$

PUNTO MÁXIMO (-1,9)

PUNTO MÍNIMO

$$f(2) = 2(2)^3 - 3(2)^2 - 12(2) + 2$$

$$f(2) = -18$$

PUNTO MÍNIMO (2,-18)

D) PUNTO DE INFLEXIÓN

$$f''(x) = 12x - 6$$

$$0 = 12x - 6$$

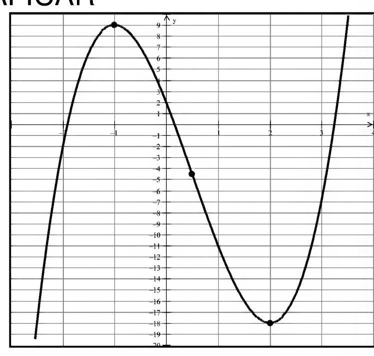
$$x = \frac{1}{2}$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 3\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 12\left(\frac{1}{2}\right) + 2$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{9}{2}$$

PUNTO DE INFLEXIÓN $\left(\frac{1}{2}, -\frac{9}{2}\right)$

E)GRÁFICAR



2.- Dada la siguiente función $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$

Determinar:

a) Los valores críticos
b) En cual valor crítico se encuentra el máximo y en cual el mínimo.
c) Las coordenadas del punto máximo y del punto mínimo.
d) Las coordenadas del punto de inflexión.
e) La gráfica
f) Intervalo donde la función es cóncava hacia abajo, cóncava hacia arriba, crece y decrece.

A) VALORES CRÍTICOS.

$$f'(x) = 4x^3 - 4x$$
$$0 = 4x^3 - 4x$$
$$0 = x^3 - x$$
$$0 = x\left(x^2 - 1\right)$$
$$x = 0 \qquad x = \pm 1$$

B) EN CUÁL VALOR CRÍTICO ESTÁ EL MÁXIMO Y EN CUÁL EL MÍNIMO.

$$f''(x) = 12x^2 - 4$$
$$f''(0) = 12(0)^2 - 4$$
$$f''(0) = -4$$

Cuando $x = 0$ la segunda derivada es negativa, por lo tanto en $x = 0$ la función es cóncava hacia abajo luego entonces hay un MÁXIMO.

$$f''(x) = 12x^2 - 4$$
$$f''(1) = 12(1)^2 - 4$$
$$f''(1) = 8$$

Cuando. $x = \pm 1$ la segunda derivada es positiva, por lo tanto en $x = \pm 1$ la función es cóncava hacia arriba luego entonces hay un MÍNIMO.

C) PUNTO MÁXIMO.

$$f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$$
$$f(0) = 0^4 - 2(0)^2 + 1$$
$$f(0) = 1$$

PUNTO MÁXIMO (0,1)

PUNTO MÍNIMO

$$f(\pm 1) = (\pm 1)^4 - 2(\pm 1)^2 + 1$$
$$f(\pm 1) = 0$$

PUNTOS MÍNIMOS $(\pm 1, 0)$

D) PUNTO DE INFLEXIÓN

$$f''(x) = 12x^2 - 4$$
$$0 = \frac{12x^2 - 4}{4}$$
$$x = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}$$
$$f\left(\pm\sqrt{\frac{1}{3}}\right) = \left(\pm\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^4 - 2\left(\pm\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^2 + 1$$
$$f\left(\pm\sqrt{\frac{1}{3}}\right) = \frac{4}{9}$$

PUNTO DE INFLEXIÓN $\left(\pm\sqrt{\frac{1}{3}}, \frac{4}{9}\right)$

E)GRÁFICAR

CÓNCAVA HACIA ARRIBA $\left(-\infty, -\sqrt{\frac{1}{3}}\right) \cup \left(\sqrt{\frac{1}{3}}, \infty\right)$

CÓNCAVA HACIA ABAJO $\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}, \sqrt{\frac{1}{3}}\right)$

3.- Dada la siguiente función $f(x) = x^5 - 5x^3$

Determinar:

a) Los valores críticos
b) En cual valor crítico se encuentra el máximo y en cual el mínimo.
c) Las coordenadas del punto máximo y del punto mínimo.
d) Las coordenadas del punto de inflexión.
e) La gráfica
f) Intervalo donde la función es cóncava hacia abajo, cóncava hacia arriba, crece y decrece.

A) VALORES CRÍTICOS.

$$f'(x)=5x^4-15x^2$$
$$0=5x^4-15x^2$$
$$0=5x^2(x^2-3)$$
$$x=0 \qquad x=\pm\sqrt{3}$$

B) EN CUÁL VALOR CRÍTICO ESTÁ EL MÁXIMO Y EN CUÁL EL MÍNIMO.

$$f''(x)=20x^3-30x$$
$$f''(-\sqrt{3})=20(-\sqrt{3})^3-30(-\sqrt{3})$$
$$f''(-\sqrt{3})=-30\sqrt{3}$$

Cuando $x=-\sqrt{3}$ la segunda derivada es negativa, por lo tanto en $x=-\sqrt{3}$ la función es cóncava hacia abajo luego entonces hay un MÁXIMO.

$$f''(x)=20x^3-30x$$
$$f''(\sqrt{3})=20(\sqrt{3})^3-30(\sqrt{3})$$
$$f''(\sqrt{3})=30\sqrt{3}$$

Cuando. $x=\sqrt{3}$ la segunda derivada es positiva, por lo tanto en $x=\sqrt{3}$ la función es cóncava hacia arriba luego entonces hay un MÍNIMO.

C) PUNTO MÁXIMO.

$$f(x)=x^5-5x^3$$
$$f(-\sqrt{3})=(-\sqrt{3})^5-5(-\sqrt{3})^3$$
$$f(-\sqrt{3})=10.4$$

PUNTO MÁXIMO $(-\sqrt{3},10.4)$

PUNTO MÍNIMO

$$f(x)=x^5-5x^3$$
$$f(\sqrt{3})=(\sqrt{3})^5-5(\sqrt{3})^3$$
$$f(\sqrt{3})=-10.4$$

PUNTOS MÍNIMOS $(\sqrt{3},-10.4)$

D) PUNTO DE INFLEXIÓN

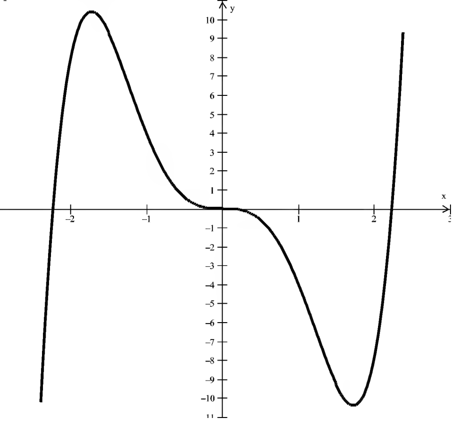
$$f''(x)=20x^3-30x$$
$$0=10x(2x^2-3)$$
$$x=\pm\sqrt{\frac{3}{2}} \qquad x=0$$
$$f\left(\pm\sqrt{\frac{3}{2}}\right)=\left(\pm\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^5-5\left(\pm\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^3$$
$$f\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)=-6.4 \qquad f\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}\right)=6.4$$

PUNTO DE INFLEXIÓN



$$\left(\sqrt{\frac{3}{2}},-6.4\right) \qquad \left(-\sqrt{\frac{3}{2}},6.4\right) \qquad (0,0)$$

E)GRÁFICAR



CÓNCAVA HACIA ABAJO

$$\left(-\infty,-\sqrt{\frac{31}{2}}\right) \qquad \left(0,\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$$

CÓNCAVA HACIA ARRIBA

$$\left(-\sqrt{\frac{3}{2}},0\right) \qquad \left(\sqrt{\frac{3}{2}},,\infty\right)$$

EJERCICIOS:

1.- Dada la siguiente función $f(x)=-x^3+3x^2+9x+1$

Determinar:

a) Los valores críticos $sol: \quad x = 3 \qquad x = -1$

b) En cual valor crítico se encuentra el máximo y en cual el mínimo.
$sol: \; En \quad x = 3 \quad hay \quad un \quad máximo \quad En \quad x = -1 \quad hay \quad un \quad mínimo.$

c) Las coordenadas del punto máximo y del punto mínimo $sol: P_{max}(,28) \; P_{min}(-1,-4)$

d) Las coordenadas del punto de inflexión $sol: P_{inf}(,12)$

e) La gráfica

f) Intervalo donde la función es cóncava hacia abajo, cóncava hacia arriba, crece y decrece.

Cóncava hacia abajo $sol: (,+\infty)$

Cóncava hacia arriba $sol: (,+\infty)$

Crece $sol: (-1,3)$

Decrece $sol: (-\infty,-1) \cup (,+\infty)$

2.- Dada la siguiente función $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$

Determinar:

a) Los valores críticos $sol: \quad x = 1 \qquad x = -1/3$

b) En cual valor crítico se encuentra el máximo y en cual el mínimo.
$sol: \; En \quad x = -1/3 \quad hay \quad un \quad máximo \quad En \quad x = 1 \quad hay \quad un \quad mínimo.$

c) Las coordenadas del punto máximo y del punto mínimo $sol: P_{max}(,28) \; P_{min}(-1,-4)$

d) Las coordenadas del punto de inflexión $sol: P_{inf}(,12)$

e) La gráfica

f) Intervalo donde la función es cóncava hacia abajo, cóncava hacia arriba, crece y decrece.

Cóncava hacia abajo $sol: (,+\infty)$

Cóncava hacia arriba $sol: (,+\infty)$

Crece $sol: (-1,3)$

Decrece $sol: (-\infty,-1) \cup (,+\infty)$

3.- Dada la siguiente función $f(x) = 2x^3 - 6x + 5$

Determinar:

a) Los valores críticos $sol:\quad x=1 \qquad x=-1$

b) En cuál valor crítico se encuentra el máximo y en cuál el mínimo.

$sol:\ En\ \ x=-1\ \ hay\ \ un\ \ máximo\ \ En\ \ x=1\ \ hay\ \ un\ \ mínimo.$

c) Las coordenadas del punto máximo y del punto mínimo $sol: P_{\max}(-1,9)\ P_{\min}(1$

d) Las coordenadas del punto de inflexión $sol: P_{\inf}\ (0,5)$

e) La gráfica

f) Intervalo donde la función es cóncava hacia abajo, cóncava hacia arriba, crece y decrece.

Cóncava hacia abajo $sol: (-\infty,0)$

Cóncava hacia arriba $sol: (0,+\infty)$

Crece $sol: (-\infty,-1)\cup(1,\infty)$

Decrece $sol: (-1,1)$

4.- Dada la siguiente función $f(x)=12+2x^2-x^4$

Determinar:

a) Los valores críticos $sol:\quad x=1 \qquad x=-1 \qquad x=0$

b) En cual valor crítico se encuentra el máximo y en cual el mínimo.

$sol:\ En\ \ x=-1\ \ y\ \ En\ \ x=1\ \ hay\ \ un\ \ \max imo\ \ En\ \ x=0\ \ hay\ \ un\ \ mínimo.$

c) Las coordenadas del punto máximo y del punto mínimo

$sol: P_{\max}(1,13)\ \ y\ \ (-1,13)\ P_{\min}(0,12)$

d) Las coordenadas del punto de inflexión $sol: P_{\inf}\left(\pm\sqrt{\frac{1}{3}},\frac{113}{9}\right)$

e) La gráfica

f) Intervalo donde la función es cóncava hacia abajo, cóncava hacia arriba, crece y decrece.

Cóncava hacia abajo $sol:\left(-\infty,-\sqrt{\frac{1}{3}}\right)\cup\left(\sqrt{\frac{1}{3}},\infty\right),$

Cóncava hacia arriba $sol: (0,+\infty)$

Crece $sol: (-\infty,-1)\cup(1,\infty)$

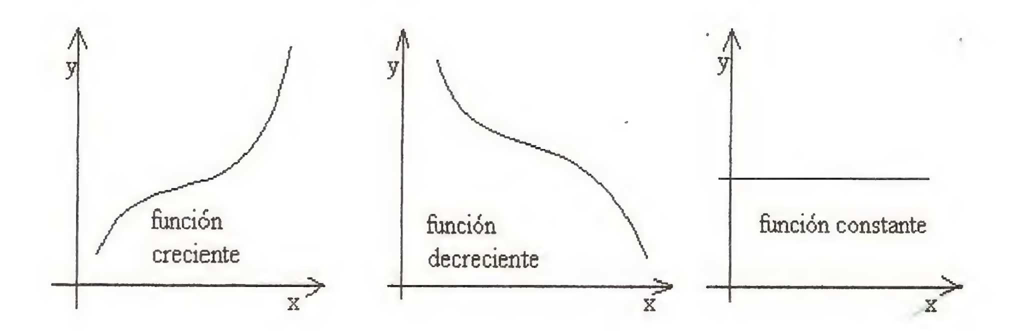
Decrece $sol: (-1,1)$

FUNCIONES CRECIENTES Y DECRECIENTES

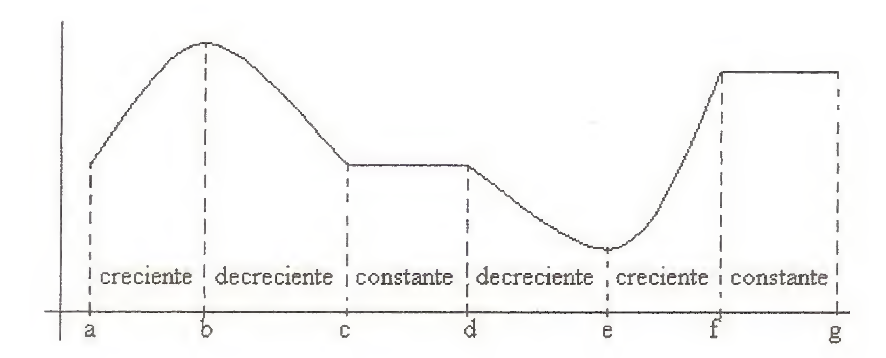
Una de las propiedades más importantes y fundamentales de una función es si esta es creciente, decreciente o constante, y aunque intuitivamente pudiera parecernos claro cuando se da esta propiedad es necesario precisarla en el lenguaje matemático con fines de comunicación.

Definición Sea f una función definida en un intervalo [a, b] , y sean x_1 y x_2 dos puntos en [a, b] . Decimos que la función f es creciente en este intervalo es decreciente si $x_1<x_2$ implica que $f(x_1)<f(x_2)$, si $x_1<x_2$ implica que $f(x_1)>f(x_2)$, y es constante si $x_1<x_2$ implica que $f(x_1)=f(x_2)$.

Se puede determinar si una función es creciente, decreciente o constante rápidamente de su gráfica. Si la función es creciente la gráfica sude cuando nos vemos de izquierda a derecha y si es constante su gráfica es una recta paralela al eje horizontal al movernos de izquierda a derecha.



Con estas ideas en mente se analiza cualitativamente el comportamiento de la siguiente gráfica.



Observamos que la gráfica tiene los siguientes comportamientos:

creciente en [a,b),

decreciente en (b,c),

constante en (c,d),

decreciente en (d,e),

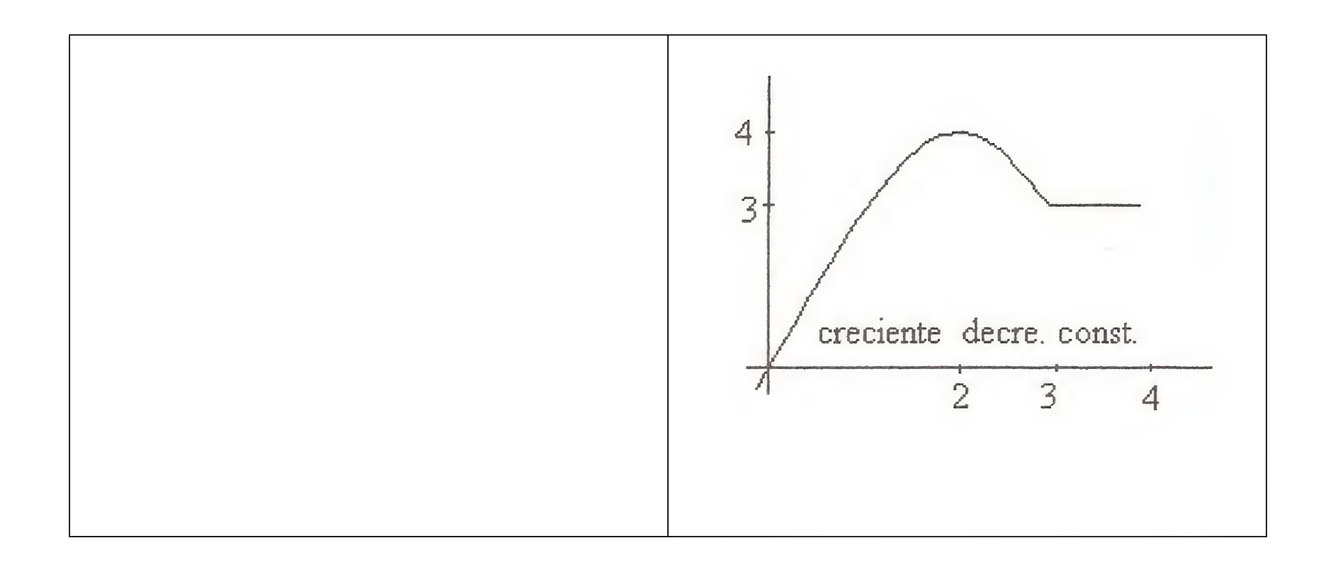
creciente en (e,f),

constante en (f,g].

Con la idea de hacer esto un poco más claro veamos un ejemplo.



EJEMPLOS	
Estudiar el comportamiento de la siguiente función $f(x) = \begin{cases} 4x - x^2 \text{ si } 0 \leq x \leq 3 \\ 3 \text{ si } 3 < x \leq 4 \end{cases}$	Para determinar si la función es creciente en el intervalo [0,2] , consideramos a los números x1=0.5 y x2=1 , elementos de este intervalo , y determinemos sus valores funcionales f(.5)=4(.5)-$(.5)^2$=1.75 y f(1)=4(1)-$(1)^2$=3.Con esta información a la mano podemos concluir que : 1. La función f es creciente en el intervalo [0,2] ya que para x1=0.5 menor que x2=1 se tiene que f(.5)=1.75 es menor que f(1) =3. 2. Sin embargo , f es decreciente en el intervalo [2,3] ya que para x1=2.1 menor que x2=2.5 se tiene que f(2.1)=3.99 es mayor que f(2.5)=3.75. 3. Finalmente , f es constante en el intervalo [3,4] ya que para x1=3.2 menor que x2=3.9 se tiene que f(3.2)=3 es igual que f(3.9)=3.



ANÁLISIS CUALITATIVO DE LA GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN CONTINUA

Análisis cualitativo de las siguientes gráficas:

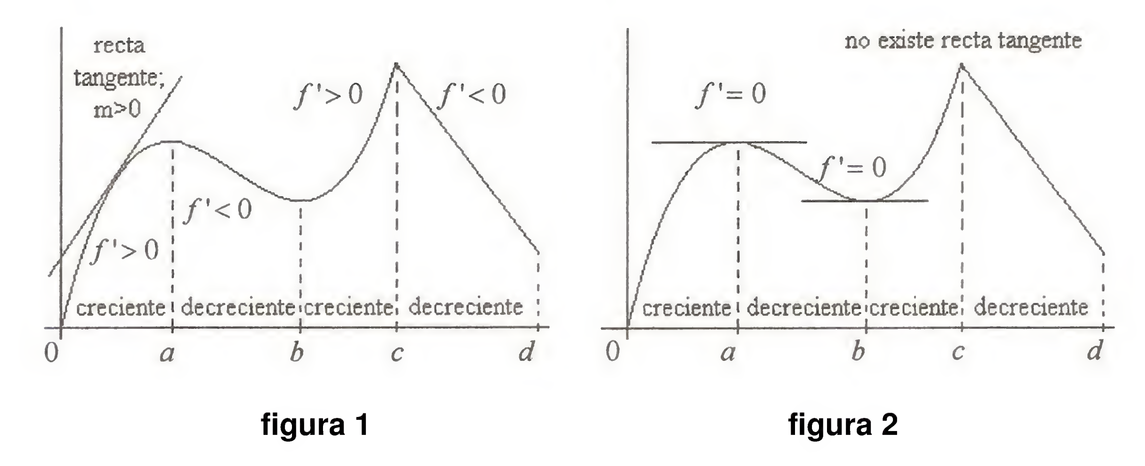


figura 1 **figura 2**

Se analiza primero la gráfica de la figura 1, de izquierda a derecha, y en forma posterior la gráfica de la figura 2.

En el intervalo (0,a) , observa que el signo de la pendiente de la recta tangente y el signo de la primera derivada en este intervalo coinciden , esto es cierto para cualquier otro intervalo , en general el signo de la pendiente de la recta tangente a la curva en un intervalo es igual al signo de la derivada de la función en el intervalo de interés , pero además observa que en este intervalo la función crece. En resumen, si una función es continua y creciente en un intervalo abierto, que podemos llamar “I”,

entonces en ese mismo intervalo el valor de la derivada y la pendiente son mayores que cero, para algún valor de la variable independiente, de igual forma, si la derivada, o la pendiente de la recta tangente, es positiva entonces la función es creciente en el mismo intervalo.

En el intervalo (a, b), el valor de la pendiente de cualquier recta tangente a la cuerva y el valor de la derivada, en cualquier valor que pertenezca al intervalo (a, b), son negativos, y la gráfica de la función es decreciente.

En el intervalo (b, c), el valor de la pendiente de cualquier recta tangente a la curva y el valor de la derivada, en cualquier valor que pertenezca al intervalo (b,c), son positivos , y la gráfica de la función es creciente .

En el intervalo (c, d), el valor de la pendiente de cualquier recta tangente a la curva y el valor de la derivada, en cualquier valor que pertenezca al intervalo (c, d), son negativos, y la gráfica de la función es decreciente.

En la figura 2 podemos observar que cuando la abscisa toma el valor a la función tiene un máximo relativo, la recta tangente en este punto es paralela al eje horizontal y la derivada de la función es igual a cero. Pero además, la primera derivada pasa de positiva en el intervalo (0,a) a negativa en el intervalo (a,b).

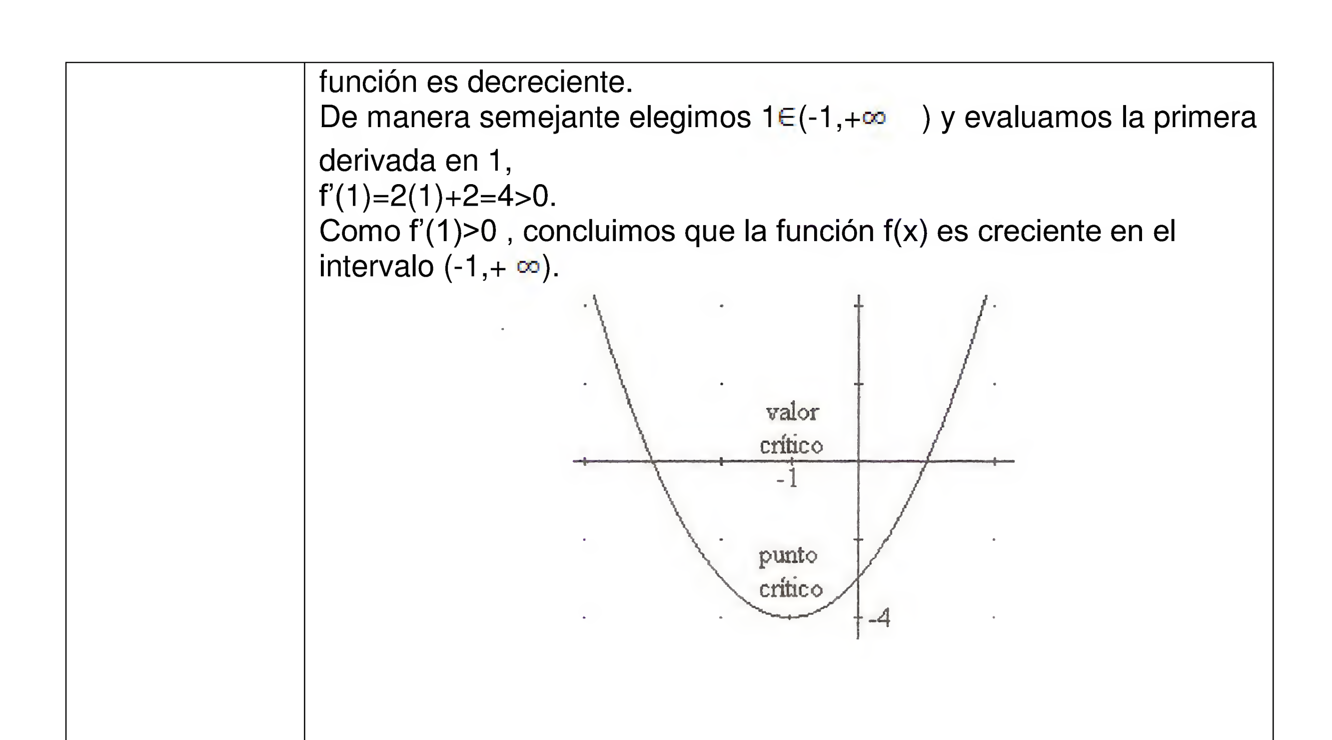
Cuando la abscisa toma el valor b la función tiene un mínimo relativo, la recta tangente en este punto es paralela el eje horizontal y la derivada de la función es igual a cero. Pero además, la primera derivada pasa de negativa en el intervalo (a, b) a positiva en el intervalo (b,c).

Finalmente, cuando la abscisa toma el valor c la función tiene un máximo relativo, no existe recta tangente en este punto y por supuesto tampoco existe derivada.



EJEMPLOS	
Hallar los intervalos donde la función $f(x)=x^2+2x-3$ es creciente y donde decreciente	Se sabe que la función tiene una valor crítico en x=-1 , si trazamos este valor sobre el eje de las abscisas , este queda dividido en los intervalos $(-\infty,-1)$ y $(-1,+\infty)$. Elijamos ahora un número real que pertenezca al intervalo $(-\infty,-1)$, por ejemplo -2 (desde luego puede ser cualquier otro valor), y evaluemos la primera derivada en x=-2. $f'(x)=2x+2$ $f'(-2)=2(-2)+2=-2$ Como $f'(-2)<0$ (negativa) concluimos que en el intervalo $(-\infty,-1)$ la

	función es decreciente. De manera semejante elegimos $1 \in (-1,+\infty)$ y evaluamos la primera derivada en 1, $f'(1)=2(1)+2=4>0$. Como $f'(1)>0$, concluimos que la función f(x) es creciente en el intervalo $(-1,+\infty)$.



EL CRITERIO DE LA PRIMERA DERIVADA PARA DETERMINAR EXTREMOS RELATIVOS

El conocimiento de los extremos relativos es fundamental a la hora de trazar la gráfica de una función y estos ocurren en valores críticos. De tal suerte que al localizar los valores críticos de una función, obtenemos una lista de abscisas en las que posiblemente se localicen los extremos relativos, si es que los hay, de una función.

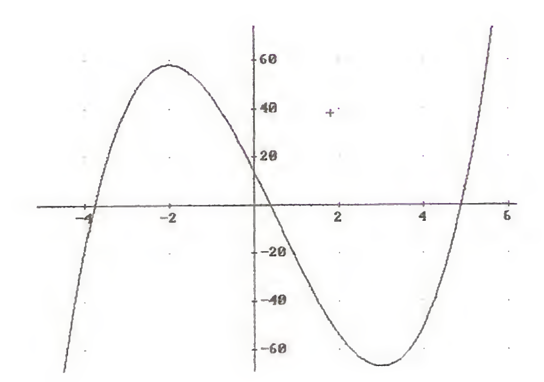
Sea la función f continua en el intervalo (a, b) y c el único valor crítico en este intervalo. Si f es derivable en el intervalo (a, b), excepto posiblemente en c, f (c) se puede clasificar de acuerdo a la siguiente tabla.

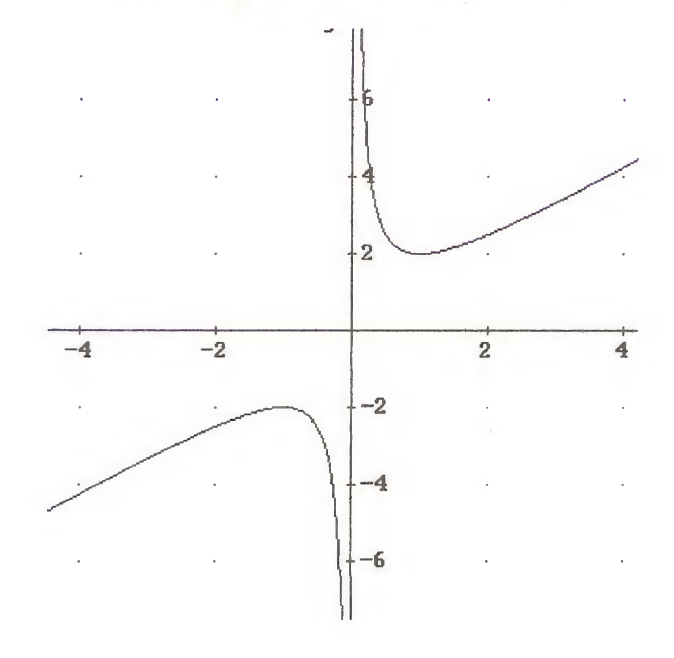
f(c)	Signo de f ‘ en (a,c)	Signo de f’ en (c,b)	Gráfica
Máximo Relativo	+	-	+ - c
Mínimo Relativo	-	+	- + c
ninguno	+	+	+ + c
ninguno	-	-	- - c

Criterio de la primera derivada para determinar máximos y mínimos relativos de una función.

- Determinar la primera derivada de la función.
- Obtener los valores de x donde la primera derivada se anula o indetermina (valores críticos).
- Investigar los cambios de signo de la primera derivada al pasar x pasando por cada valor crítico x_1, x_2, x_3,… etc. deduciéndose de estos cambio s que existe de un máximo relativo si cambia de (+) a (-) o un mínimo relativo si cambia de (-) a (+).

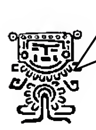


EJEMPLOS	
Trazar la gráfica de la función f(x)=$2x^3 - 3x^2 - 36x + 14$	Se determina primero los valores críticos. $f'(x) = 6x^2 - 6x - 36$ $6x^2 - 6x - 36$=0 $6(x^2 - x - 6) = 0$ 6(x-3)(x+2)=0 Los valores críticos son: 3 y -2 .Procederemos en este momento a investigar el signo de la derivada en los tres intervalos definidos por los valores críticos (-∞, -2), (-2,3) y (3,∞). Tomando respectivamente los valores -3,0 y 4. $f'(-3) = 6(-6)(-1) > 0,$ $f'(0) = 6(-3)(2) < 0,$ $f'(4) = 6(1)(6) > 0.$ Evaluemos la función f(x)=$2x^3 - 3x^2 - 36x + 14$ en cada valor crítico. f(-2)=$2(-2)^3 - 3(-2)^2 - 36(-2) + 14$ f(3)=$2(3)^3 - 3(3)^2 - 36(3) + 14$ f(-2)=$2(-8) - 3(4) + 72 + 14$ f(3)=81-27-810+14 f(-2)=58 f(3)=-67 
Trazar la gráfica de la función $f(x) = x + \frac{1}{x}$.	Se inicia el análisis de la función puesta en la forma $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$, en la cual se observa que la función esta indeterminada en x=0 , por lo tanto la recta x=0 es una asíntota vertical de la gráfica de la función o en otras palabras , la gráfica es simétrica a dicha recta ,y que en este caso particular coincide con el eje vertical. También se observa que el numerador nunca se

	anula, lo cual indica que la gráfica no corta al eje horizontal. Determinemos ahora la derivada $$f'(x) = \frac{(2x)(x) - (x^2 + 1)}{x^2}$$ $$f'(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2}$$ De esta última expresión se observa que la derivada se anula cuando $x^2 - 1$=0, por lo tanto 1y -1 son valores críticos, pero no son los únicos, ya que la derivada se indetermina en 0 (cero), de tal suerte que tenemos tres valores críticos:-1 ,0 y 1 .Debemos ahora investigar el comportamiento de la derivada en los siguientes intervalos (-$\infty, -1$), (-1,0),(0,1) y (1, ∞). $$f'(-2) = \frac{(-2)^2 - 1}{(-2)^2} > 0\ para - 2 \in (-\infty, -1),$$ $$f'(-.5) = \frac{(-.5)^2 - 1}{(-.5)^2} < 0\ para - .5 \in (-1,0),$$ $$f'(.5) = \frac{(.5)^2 - 1}{(.5)^2} < 0\ para\ .5 \in (0,1),$$ $$f'(2) = \frac{(2)^2 - 1}{(2)^2} > 0\ para\ 2 \in (1, \infty).$$ 

¿Qué necesito?

- Conceptos de la derivada
- Reglas de derivación
- Derivación Implícita
- Criterios de la primera derivada
- Factorización
- Operatividad
- Gráfica



EJERCICIOS Determinar los extremos relativos y graficar

f(x)=$-2x^2+4x+3$ f(x)=x^2-6x f(x)=$2x^3+3x^2-12x$ f(x)=x^3-6x^2+15 f(x)=$x^{\frac{1}{3}}+1$ f(x)=$\frac{x^2}{x^2-9}$ f(x)=$\frac{x^2-2x+1}{x+1}$	máximo relativo (1,5) (3,-9) mínimo relativo (-2,20) máximo relativo; (1,-7) mínimo. relativo (0,15) máximo relativo;(4,-17) mínimo relativo sin extremos relativos (0,0) máximo relativo .(-3,-8) máximo relativo; (1,0)mínimo relativo.
La altura de una pelota en el instante t está dada por la ecuación h(t)=96t-16t^2 a. ¿Cuál era la velocidad inicial de la pelota? b. ¿Qué altura alcanzo la pelota? c. ¿En qué sentido se movía la pelota en el instante t=1? d. Hallar la altura de la pelota en el instante t=1.	a.96 pies/seg. b.144 pies. c. Hacia abajo. d.80 pies.

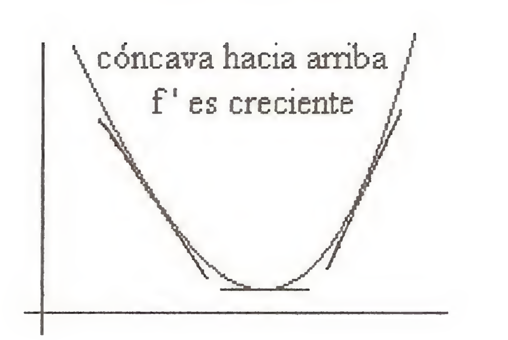
CRITERIO DE LA SEGUNDA DERIVADA PARA DETERMINAR EXTREMOS RELATIVOS

La determinación de los intervalos en que una función es creciente o decreciente, apoyados en lo valores críticos y la primera derivada, resulta útil al momento de trazar su gráfica .Apoyados en un nuevo concepto que llamaremos concavidad ampliaremos esta idea; la determinación de los intervalos donde la derivada crece o decrece, apoyados de la segunda derivada, resultará útil para determinar el tipo de curvatura que presenta la gráfica.

Definición de concavidad

Sea f derivable en (a, b). La gráfica de f es:

1. Cóncava hacia arriba en (a,b) si f’ es creciente en (a,b).
2. Cóncava hacia abajo en (a,b) si f’ es decreciente en (a,b).





Observa de las gráficas anteriores que en el primer caso la curva queda por encima de las rectas tangentes y en el segundo por abajo.

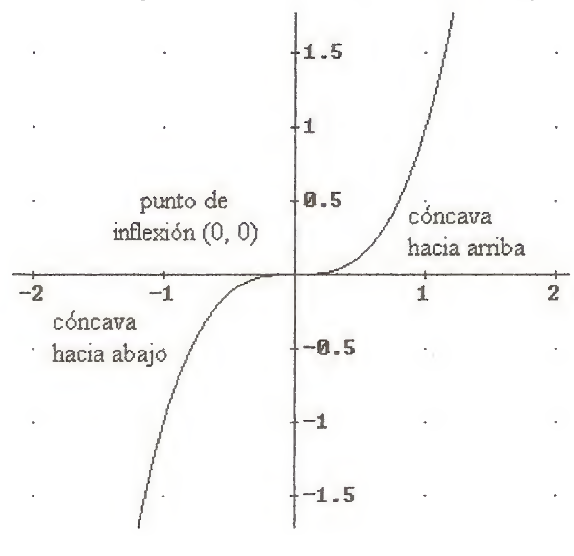
A continuación se proporciona un criterio paralelo al utilizado para determinar los intervalos en que una función es creciente o decreciente con ayuda de la primera derivada. Para determinar la concavidad de una función nos apoyaremos ahora en la segunda derivada, la cual nos ayudará a determinar los intervalos en que la primera derivada es creciente o decreciente. Cuando sea conveniente utilizaremos los símbolos $\cup$ y $\cap$ en la tabla para representar la concavidad hacia arriba y hacia abajo respectivamente.

Criterio de concavidad

Sea f una función cuya derivada segunda existe en el intervalo (a, b).

1. Si f''(x)>0 para todo x en (a, b), la gráfica de f es cóncava hacia arriba.
2. Si f''(x) <0 para todo x en (a, b), la gráfica de f es cóncava hacia abajo.



EJEMPLOS	
f(x)=x^3 es cóncava hacia arriba o hacia abajo	Procederemos primero a determinar la segunda derivada de f (x) =x^3. f´(x)=3x^2 f''(x)=6x Igualando a cero la segunda derivada 6x=0, tenemos que 0(cero) es un valor crítico y en consecuencia quedan definidos los intervalos (-∞, 0) y (0, ∞) en los que debemos investigar la concavidad .Tomemos los valores -1∈ (-∞, 0) y 1∈(0, ∞) y determinemos el signo de la segunda derivada en cada uno de ellos para conocer la concavidad. f'(-1)=3$(-1)^2 > 0$;la función crece. f´(1)=3$(1)^2$>0;la función crece. f´´(-1)=6(-1)<0; la gráfica es cóncava hacia arriba. f''(1)=6(1)>0 ; la gráfica es cóncava hacia abajo. 

Punto de inflexión se presenta donde hay cambio de concavidad de la gráfica, o en otras palabras, donde existe un cambio de signo de la derivada segunda. Así que para localizar los posibles puntos de inflexión solo necesitamos determinar los valores de x para los que la segunda derivada vale cero o no existe. Sin embargo, es posible que la segunda derivada sea cero en un punto que no es punto de inflexión.

La segunda derivada, si es que existe, puede ser usada como un criterio para determinar los extremos relativos. La idea es que si f(c) es un máximo relativo de una función diferenciable f, su gráfica es cóncava hacia arriba en algún intervalo que contiene a *c*. De manera análoga, si f (c) es un mínimo relativo, su gráfica es cóncava hacia arriba en algún intervalo que contiene a *c*. Esta idea es formalmente expresada en el siguiente párrafo.

Criterio de la segunda derivada para determinar extremo relativos

Supongamos que f’’ en algún intervalo abierto que contiene a c y que f’ (c)=0

1. Si f’’(c)>0, f(c) es un mínimo relativo.
2. Si f’’(c) <0, f(c) es un máximo relativo.

Demostración Por definición,

$$f''(c) = \lim_{h \to 0} \left(\frac{f'(c+h) - f'(c)}{h} \right)$$

Puesto que f’ (c)=0

$$f''(c) = \lim_{h \to 0} \left(\frac{f'(c+h)}{h} \right).$$

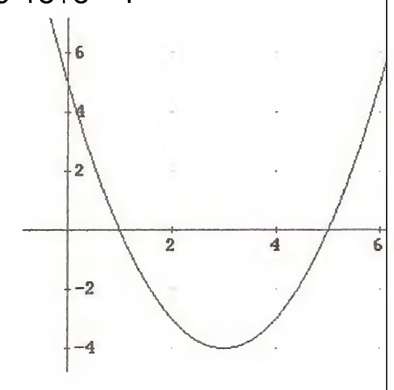
Si f’’(c)>0 .Entonces $\frac{f'(c+h)}{h}$ debe ser positiva para h$\rightarrow 0$. Por lo tanto:

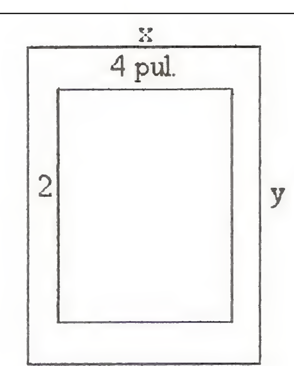
f’(c +h)>0 para h>0

f´(c+h) <0 para h<0

Esto significa que f crece en algún intervalo a la derecha de c y f decrece en algún intervalo a la izquierda de c. En consecuencia, f tiene un mínimo relativo en c.



EJEMPLOS	
Trazar la gráfica de la función f(x)=x^2-6x+5	Determinando las raíces. x^2-6x+5=(x-5)(x-1) Así la gráfica corta al eje horizontal en 5 y 1. Determinando y anulando la primera derivada. f´=2x-6 2x-6=0 por lo tanto x=3 ; es un valor crítico . Evaluando la primera derivada en 0 y 5 tenemos 2(0)-6<0; la función decrece. 2(5)-6>0; la función crece. Determinando la segunda derivada. f''=2; existe mínimo relativo. Determinando el mínimo relativo; f (3)=$(3)^2$-6(3)+5 =9-18+5=-4 
Un volante de propaganda debe contener 50 pulgadas cuadradas e material impreso con 4 pulgadas de margen superior e inferior y 2 pulgadas de márgenes laterales. ¿Qué dimensiones debe tener el volante	Sea y la altura y x el ancho del volante .Su área será A=xy.

para que el gasto de papel sea el mínimo?	 Deseamos minimizar A y para ello es necesario expresar el área A en función de una sola variable, así que necesitamos otra expresión que involucre a las variables x y y de modo que podamos eliminar una variable. El área del texto impreso está dada por (x-4)(y-8)=50. Despejando a la variable y de esta última $y=\frac{50}{x-4}+8.$ Sustituyendo en A =xy se obtiene una expresión, para el área, que es función de una sola variable. $A(x)=\frac{50x}{x-4}+8x.$ Apliquemos a esta expresión los criterios conocidos para extremos relativos. Si lo deseas puedes tabular. $A´(x)=\frac{(x-4)50-50x}{(x-4)^2}+8=$ Los valores críticos son -1, 4 y 9 .Desde luego descartamos el -1ya que el ancho del volante no puede ser negativo, también descartamos el 4 porque el área de impresión no es cero, así que el único valor variable para la variable x es 9. Existen en este momento disponemos de dos alternativas para continuar:

Primero, podemos determinar la segunda derivada y evaluarla en 9 para conocer el signo y poder determinar de qué extremo relativo se trata .**Segundo**, con la ayuda de la primera derivada analizar los cambios de signo, y desde luego, determinar si se trata de un máximo o de un mínimo relativo. Se deja como ejercicio el primer caso y procederé a desarrollar el segundo, para investigaremos el signo de la primera derivada en 8 y 10.

$$A´(8) = \frac{8(8+1)(8-9)}{(8-4)^2} = \frac{8(9\ldots}{(\ldots}$$

$$A´(10) = \frac{8(10+1)(10-9)}{(10-4)^2} = \ldots$$

La primera derivada cambia de positiva a negativa, por lo tanto podemos concluir que

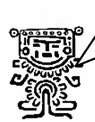
$f(9)=\frac{50(9)}{(9-4)}+8=\frac{450}{5}+8=90+8=98,$

es el área máxima del volante .En consecuencia las dimensiones del volante para que tenga área máxima son

$x=9$ y $y=\frac{50}{9-4}+8=18.$

¿Qué necesito?

- Conceptos de la derivada
- Reglas de derivación
- Derivación Implícita
- Criterios de primera y segunda derivada
- Factorización
- Operatividad
- Gráfica



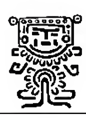
EJERCICIOS. Para las funciones determina los extremos relativos, puntos de inflexión y gráfica

1. $f(x) = 6x - x^2$	(3,9) máximo relativo
2. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$	(0,3) máximo relativo,(2,-1) mínimo relativo, (1,1) punto de inflexión (3,-25) mínimo relativo, (0,2),(2,-14)puntos de inflexión
3. $f(x) = x^4 - 4x^3 + 2$	(-2,-4) máximo relativo, (2,4) mínimo relativo.
4. $f(x) = x + \frac{4}{x}$	(2,0) punto de inflexión
5. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$	(-2,16) máximo relativo, (2,-16) mínimo. relativo, (0,0) punto de inflexión.
6. $f(x) = x^3 - 12x$ (-2,16) máx. rel., (2,-16) mín. rel.,(0,0) p. inf .	(-2,-2) mínimo relativo. (0,3) máximo relativo, (2,-1) mínimo relativo, (1,1) punto de inflexión.

7. $f(x) = x\sqrt{x+3}$ (-2,-2) mín. rel. 8. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$ 9. $f(x) = -x^3 - x + 2$ 10. $f(x) = x^{\frac{1}{3}} + 2x$	(0,2) punto de inflexión No tiene extremos relativos ni punto de inflexión

¿Qué necesito?

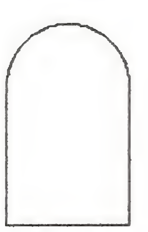
- Trabajar en equipo.
- Discutir tus conjeturas
- Organizar la información en una tabla
- Buscar un patrón
- Haz un dibujo o un diagrama
- Busca otra forma de representar
- Analiza un caso particular





PROBLEMAS.

	Solución
1. Un rectángulo tiene un perímetro de 100 pies. ¿Qué longitud y anchura debe tener para que su área sea máxima?	25 y 25 pies.
2. La suma de un número con dos veces un segundo número es 24 .¿Qué números se deben elegir para que su producto sea máximo? .	12 y 6
3. Hallar los puntos de la gráfica de la parábola $y = 4 - x^2$ más próximos al punto de coordenadas (0,2). $(\sqrt{\frac{3}{2}},\frac{5}{2})\ y\ (-\sqrt{\frac{3}{2}},\frac{5}{2}).$	$\sqrt{\frac{3}{2}},\frac{5}{2})\ y\ (-\sqrt{\frac{3}{2}},\frac{5}{2}).$
4. A partir de 108 pulgadas cuadradas de material se ha de construir una caja abierta de base cuadrada .¿Cuáles han de ser las dimensiones de la caja para obtener un volumen máximo?	base=6 pulgadas y altura =3 pulgadas
5. Dos postes de 20 y 28 pies de altura respectivamente se encuentran a 30 pies de distancia. Se han de sujetar con cables fijos en un solo punto, desde el suelo a los extremos de los postes. ¿Dónde se ha de fijar el cable para que la cantidad de cable a emplear sea mínima?	12.5 pies del poste de 20 pies.

6. Se ha de construir una caja abierta a partir de un trozo cuadrado de material de 12 pulgadas de lado, cortando cuadrados iguales de cada esquina y doblando los lados. Hallar el volumen de la mayor caja que sea posible construir de esta manera	128 u^3
7. Hallar dos números positivos cuya suma sea 110 y cuyo producto sea máximo	55 y 55
8. Hallar las coordenadas del punto más cercano al (4,0) sobre la curva $y = \sqrt{x}$.	$\left(\frac{7}{2}, \sqrt{\frac{7}{2}}\right)$.
9. Se desea construir un túnel cuya sección se ve en la figura, el perímetro de la sección debe de ser de 40 m. Calcular el valor del radio r y el lado x para que el área de la sección sea máxima. 	A=πr^2 P=2πr r=x r=$\frac{40}{4+\pi}$
10. Hallar los puntos de la gráfica y=4-x^2 que están más próximos al punto (0,-2).	$d = \sqrt{(x-0)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{x}$ $f(x) = \sqrt{x^4 - 3x^2 + 4}$
11. Un controlador aéreo sitúa dos aviones a la misma altitud convergiendo en un punto conforme vuelan formando un ángulo recto. Un avión esta a 150 millas del punto y se mueve a 450 millas/h. El otro avión está a 200 millas del punto y tiene una velocidad de 600 millas/h. (a) ¿A qué razón está decreciendo la distancia entre los aviones? (b) ¿De cuánto tiempo dispone el controlador para situar uno de los aviones en una trayectoria de vuelo distinta?	(a)-750 millas/h (b) 20 min.

GRÁFICACION DE CURVAS

Para graficar a las curvas a partir de sus ecuaciones es necesario determinar:

El diagrama de signos de la primera derivada
Que nos permite determinar los intervalos de su crecencia y de su decrecencia y de sus puntos máximos o mínimos relativos o locales.

El diagrama de signos de la segunda derivada
Que nos permite determinar los intervalos de sus concavidades y sus puntos de inflexión.

PROBLEMA 1.- Graficar a la curva $y = x^4 - 4x^3 + 10$

Solución



Primera Derivada

$$\frac{dy}{dx} = 4x^3 - 12x^2$$

Segunda Derivada

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 12x^2 - 24x$$

Se determinan "factores lineales" ó de primer grado en la variable x, y factores de primero, segundo, tercero, etc., grados en x, si constituyen factor único.

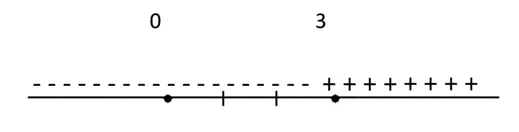
$$\frac{dy}{dx} = 4x^2\,(x - 3)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 12x(x - 2)$$

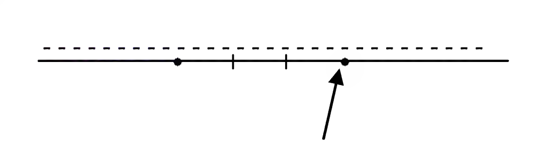
Se trazan los diagramas de signos de las derivadas como sigue:

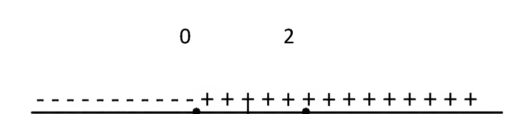
x^2

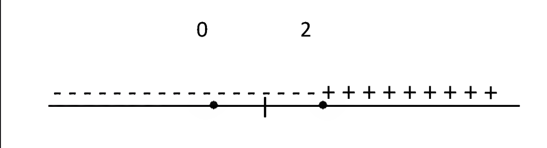
0 3

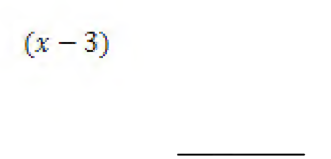


$-\frac{dy}{dx}$

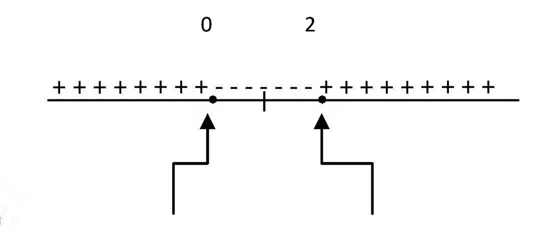








$(x-3)$

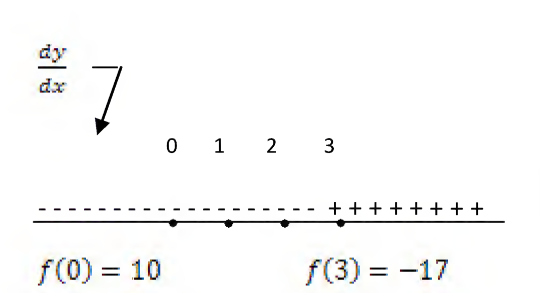


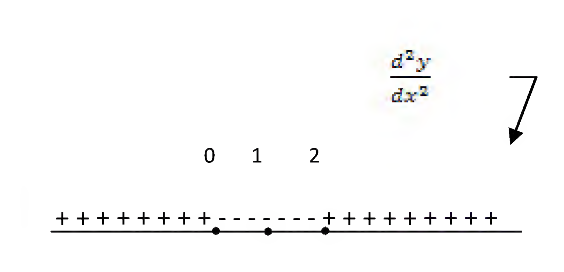
CAMBIO DE SIGNO

Conocidos los diagramas de signos de las dos primeras derivadas, se determinan los valores de $y = f(x)$ de acuerdo con la ecuación de la curva dada originalmente

$y = x^4 - 4x^3 + 10$

Es decir:

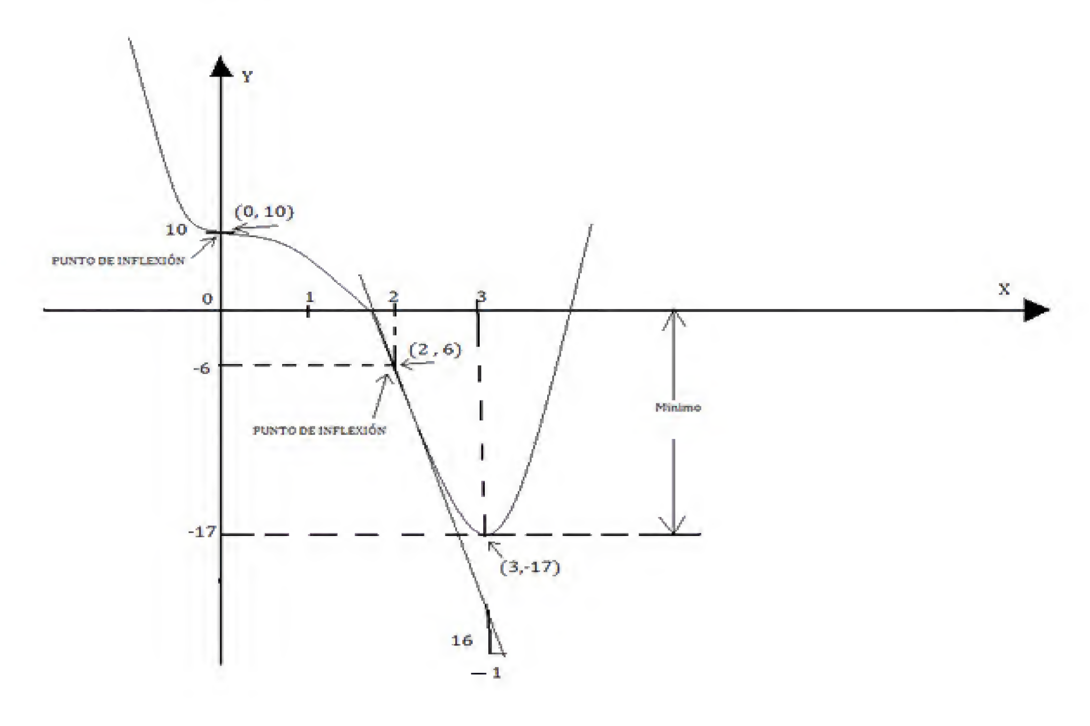




En ← -∞ < x< 3 → La Curva baja o desciende	En ← 3<x< +∞→ La Curva sube o asciende	En ←-∞<x<0→ Es cóncava hacia arriba	En ←0<x<2→ Es cóncava hacia abajo	En ← 2<x<+∞ → Es cóncava hacia arriba

$f(0) = 10$ $f(2) = -6$

La gráfica se dibuja cualitativamente como se muestra a continuación.



PROBLEMA 2.- Gráficar la curva $y = \frac{x^2-3}{2x-4}$

SOLUCIÓN

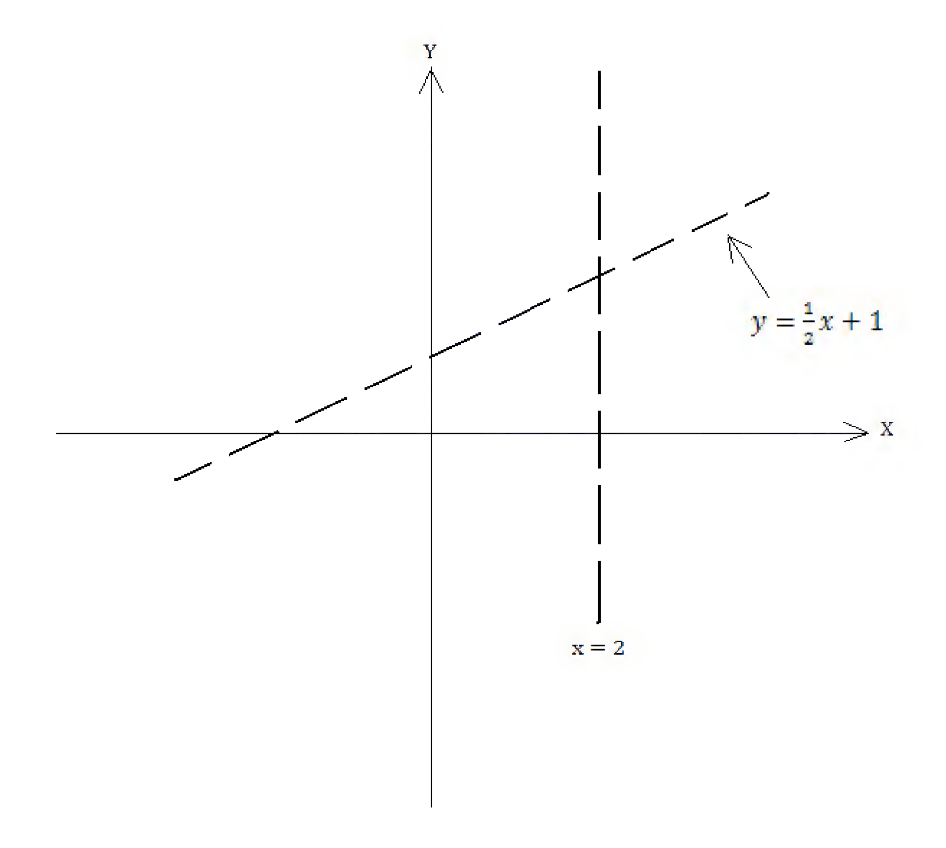
En este caso, inicialmente se investiga qué valor o qué valores de la variable x hacen igual a cero al denominador, que están dados por

$2x - 4 = 0$

De donde $x = 2$ es una asíntota vertical efectuando el cociente de la fracción resulta

$$\frac{x^2-3}{2x-4} = \frac{x}{2} + 1 + \frac{1}{2(x-2)},$$

De modo que $y = \frac{x}{2} + 1$ es una asíntota oblicua como se muestra en la figura.



Determinando las derivadas de la función en la forma

$$y = \frac{x}{2} + 1 + \frac{1}{2(x-2)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{(x-2)^2}\right]$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left[\frac{x^2-4x+3}{(x-2)^2}\right]$$

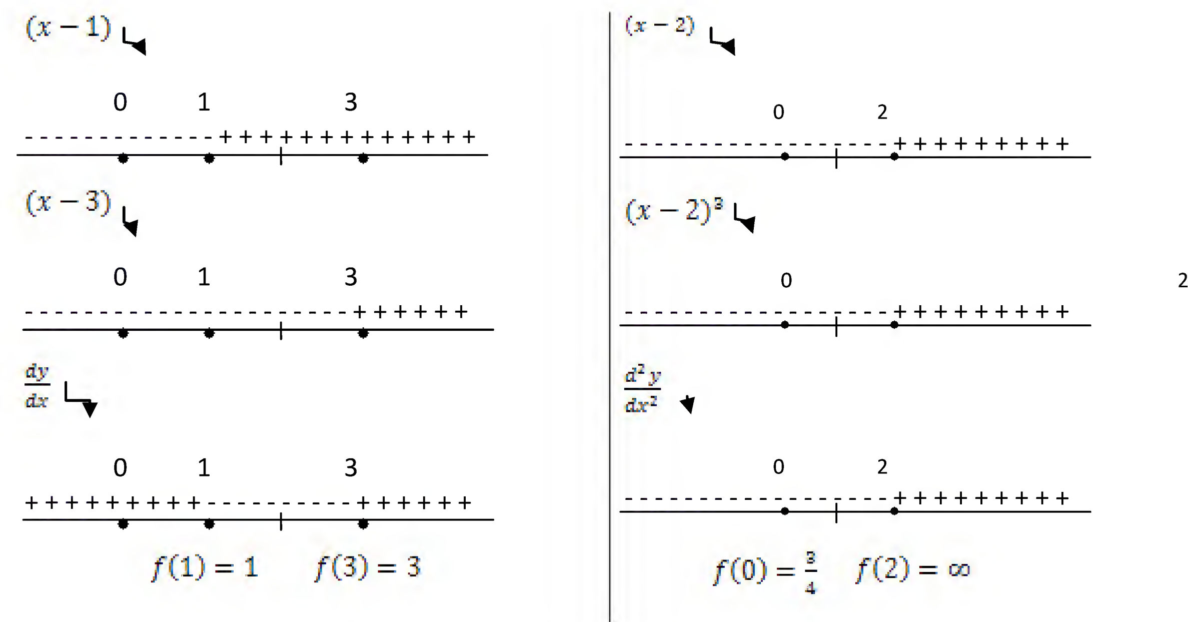
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left[\frac{(x-3)(x-1)}{(x-2)^2}\right]$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left[\frac{(x-2)^2(2x-4)-(x^2-4x+3)2(x-2)}{(x-2)^4}\right]$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(x-2)^2-(x^2-4x+3)}{(x-2)^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{(x-2)^3}$$

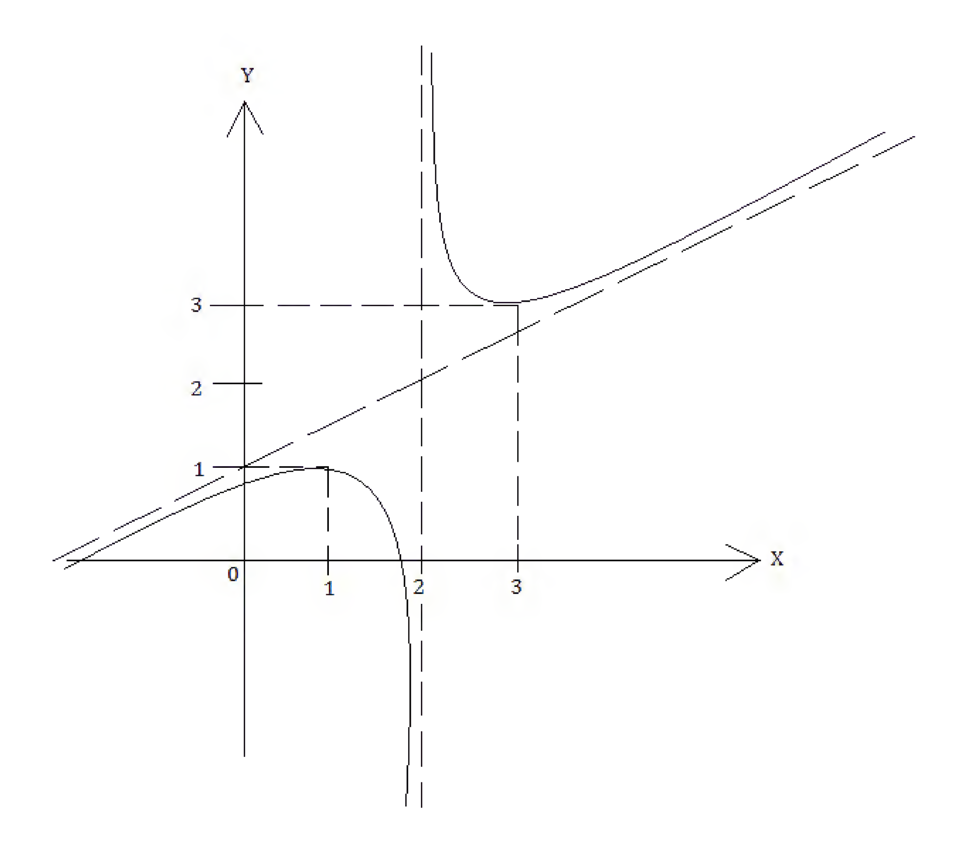
Los diagramas de signos se muestran a continuación:



La gráfica de la curva dada por la ecuación

$$y=\frac{x^2-3}{2x-4}$$

Se muestra a continuación:



Unidad 3: Derivada de funciones trascendentes y diferenciales
Competencia 3: Resuelve Problemas referentes de la derivada de funciones trascendentes y el uso de la diferencial, en situaciones de su entorno académico

RAP 1

OBTIENE DERIVADAS DE FUNCIONES TRASCENDENTES, A PARTIR DE LA DEFINICIÓN DE DERIVADA Y EL USO DEL FORMULARIO, EN SITUACIONES ACADÉMICAS.

DERIVADA DE LA FUNCIÓN SENO.

$$\frac{d}{dx}(senx) = \lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{sen(x+\Delta x) - senx}{\Delta x}\right]$$

$$\frac{d}{dx}(senx) = \lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{senxcos\Delta x + cosxsen\Delta x - senx}{\Delta x}\right]$$

$$\frac{d}{dx}(senx) = \lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{senx(cos\Delta x - 1) + cosxsen\Delta x}{\Delta x}\right]$$

$$\frac{d}{dx}(senx) = \lim_{\Delta x \to 0}\left[senx\left(\frac{cos\Delta x - 1}{\Delta x}\right) + cosx\left(\frac{sen\Delta x}{\Delta x}\right)\right]$$

$$\frac{d}{dx}(senx) = \text{senx}\left[\lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{cos\Delta x - 1}{\Delta x}\right) + cosx\left[\lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{sen\Delta x}{\Delta x}\right)\right]\right]$$

$$\frac{d}{dx}(senx) = \text{senx}(0) + cosx(1)$$

$$\therefore \frac{d}{dx}(senx) = cosx$$

PARA FUNCIONES COMPUESTAS.

$$\therefore \frac{d}{dx}(senu) = cosu \cdot \frac{du}{dx}$$

Así de la misma manera, aplicando la definición de derivada, se obtienen las reglas de derivación de las funciones trascendentes.

FORMULARIO DE LAS REGLAS DE DERIVACIÓN DE LAS FUNCIONES TRASCENDENTES.

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS	FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS.
$1.-\frac{d}{dx}(senu)=cosu\cdot\frac{du}{dx}$	$1.-\frac{d}{dx}(\sin^{-1}u)=\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot\frac{du}{dx}$
$2.-\frac{d}{dx}(cosu)=-senu\cdot\frac{du}{dx}$	$2.-\frac{d}{dx}(\cos^{-1}u)=-\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot\frac{du}{dx}$
$3.-\frac{d}{dx}(tanu)=sec^2u\cdot\frac{du}{dx}$	$3.-\frac{d}{dx}(\tan^{-1}u)=\frac{1}{1+u^2}\cdot\frac{du}{dx}$
$4.-\frac{d}{dx}(cotu)=-csc^2u\cdot\frac{du}{dx}$	$4.-\frac{d}{dx}(\cot^{-1}u)=-\frac{1}{1+u^2}\cdot\frac{du}{dx}$
$5.-\frac{d}{dx}(secu)=secu\cdot tanu\frac{du}{dx}$	$5.-\frac{d}{dx}(\sec^{-1}u)=\frac{1}{\lvert u\rvert\sqrt{u^2-1}}\cdot\frac{du}{dx}$
$6.-\frac{d}{dx}(cscu)=-cscucotu\frac{du}{dx}$	$6.-\frac{d}{dx}(\csc^{-1}u)=-\frac{1}{\lvert u\rvert\sqrt{u^2-1}}\cdot\frac{du}{dx}$
	DERIVADAS DE FUNCIONES EXPONENCIALES.
	$1.-\frac{d}{dx}(e^u)=e^u\cdot\frac{du}{dx}$
	$2.-\frac{d}{dx}(a^u)=a^u lna\cdot\frac{du}{dx}$
	DERIVADAS DE FUNCIONES LOGARITMICAS.
	$1.-\frac{d}{dx}(lnu)=\frac{1}{u}\cdot\frac{du}{dx}$
	$2.-\frac{d}{dx}(\log_a u)=\frac{\log_a e}{u}\cdot\frac{du}{dx}$

EJEMPLO:

DERIVADA DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS.

1.- $y = sen3x^2$

$y' = 6xcos3x^2$

2.-$y = sen\frac{x}{2}$

$y' = \frac{1}{2}cos\frac{x}{2}$

3.-$y = sen\frac{x^2+2}{3}$

$y' = \frac{2}{3}xcos\frac{x^2+2}{3}$

4.-$y = \sqrt{cos5x}$

$y' = \frac{-5sen5x}{2\sqrt{cos5x}}$

5.-$y = x^2cosx$

$y' = -x^2senx + 2xcosx$

6.-$y = \frac{cosx}{2}$

$y' = -\frac{1}{2}senx$

7.-$y = tan^2 5x$

$y' = 10(tan5x)sec^2 5x$

8.-$y = \frac{tanx}{x}$

$y' = \frac{xsec^2x - tax}{x^2}$

9.-$y = tan^3 5x$

$y' = 15tan^2 5x(sec^2 5x)$

10.-$y = 3cot2x^2$

$y' = -12xcsc^2 2x^2$

11.-$y = \frac{cot3x}{3}$

$y' = -csc^2 3x$

12.-$y = 2xcotx$

$y' = -2xcsc^2x + 2cotx$

13.-$y = x\sqrt{sec3x}$

$y' = x\frac{3sec3xtan3x}{2\sqrt{sec3x}} + \sqrt{sec3x}$

14.-$y = sec\left(\frac{x^2+2}{5}\right)$

$y' = \frac{2}{5}xsec\left(\frac{x^2+2}{5}\right)tan\left(\frac{x^2+2}{5}\right)$

15.-$y = 7sec\frac{x}{3}$

$y' = \frac{7}{3}sec\frac{x}{3}tan\frac{x}{3}$

16.-$y = acsc5x$

$y' = -5acsc5xcot5x$

17.-$y = \frac{1}{4}csc3x$

$y' = -\frac{3}{4}csc3x \cdot cot3x$

18.-$y = \frac{cscx}{x}$

$y' = \frac{xcscxcotx - cscx}{x^2}$

EJEMPLO:

DERIVADA DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS.

1.- $y = \sin^{-1} 3x$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-(3x)^2}} \cdot \frac{d}{dx} 3x$$

$$y' = \frac{3}{\sqrt{1-9x^2}}$$

2.- $y = \sin^{-1} \sqrt{x}$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\sqrt{x}\right)^2}} \cdot \frac{d}{dx} \sqrt{x}$$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x} \cdot 2\sqrt{x}}$$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x-x^2}}$$

3.- $y = \sin^{-1} \sqrt{ax}$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\sqrt{ax}\right)^2}} \cdot \frac{d}{dx} \sqrt{ax}$$

$$y' = \frac{a}{\sqrt{1-ax} \cdot 2\sqrt{ax}}$$

$$y' = \frac{a}{2\sqrt{ax-a^2x^2}}$$

4.- $y = \cos^{-1} \sqrt{1-x}$

$$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-\left(\sqrt{1-x}\right)^2}} \cdot \frac{d}{dx} \sqrt{1-x}$$

$$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-(1-x)}} \cdot \frac{-1}{2\sqrt{1-x}}$$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{1-x} \cdot \sqrt{x}}$$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x-x^2}}$$

5.-$y = \cos^{-1} \left(\frac{x-2}{x}\right)$

$$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x-2}{x}\right)^2}} \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{x-2}{x}\right)$$

$$y' = -\frac{1}{\sqrt{\frac{x^2-(x-2)^2}{x^2}}} \cdot \frac{2}{x^2}$$

$$y' = \frac{2}{x\sqrt{x^2-(x-2)^2}}$$

6.- $y = \tan^{-1} \left(\frac{x-1}{x+1}\right)$

$$y' = \frac{1}{1+\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2} \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$$

$$y' = \frac{1}{\frac{(x+1)^2+(x-1)^2}{(x+1)^2}}\left(\frac{x+1-(x-1)}{(x+1)^2}\right)$$

$$y' = \frac{2}{(x+1)^2+(x-1)^2}$$

7.- $y = \tan^{-1} (5x-1)^2$

$$y' = \frac{1}{1+(5x-1)^4} \cdot \frac{d}{dx} (5x-1)^2$$

$$y' = \frac{1}{1+(5x-1)^4} \cdot 10(5x-1)$$

$$y' = \frac{10(5x-1)}{1+(5x-1)^4}.$$

8.- $y = \cot^{-1} \frac{5}{\sqrt{x}}$

$$y' = -\frac{1}{1+\left(\frac{5}{\sqrt{x}}\right)^2} \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{5}{\sqrt{x}}\right)$$

$$y' = -\frac{1}{1+\frac{25}{x}} \cdot \left(\frac{5\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{x}\right)$$

$$y' = -\frac{1}{\frac{x+25}{x}} \cdot \left(-\frac{5}{2x\sqrt{x}}\right)$$

9.- $y = \cot^{-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$ $y' = -\dfrac{1}{1+\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2}\cdot\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$ $y' = -\dfrac{1}{\frac{(1+x)^2+(1-x)^2}{(1+x)^2}}\left(\dfrac{1+x-(1-x)}{(1+x)^2}\right)$ $y' = \dfrac{2}{(1+x)^2+(1-x)^2}$ 10.- $y = \sec^{-1}(3x+2)^2$ $y' = \dfrac{1}{(3x+2)^{2\sqrt{(3x+2)^4-1}}}\dfrac{d}{dx}(3x+2)^2$ $y' = \dfrac{6}{(3x+2)^{\sqrt{(3x+2)^4-1}}}$ 11.- $y = \sec^{-1}\frac{5-x}{x}$ $y' = \dfrac{1}{\frac{5-x}{x}\sqrt{\left(\frac{5-x}{x}\right)^2-1}}\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{5-x}{x}\right)$ $y' = \dfrac{1}{\frac{5-x}{x}\sqrt{\frac{(5-x)^2-x^2}{x^2}}}\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{-x-5+x}{x^2}\right)$ $y' = -\dfrac{5}{(5-x)\sqrt{(5-x)^2-x^2}}$ 12.- $y = \csc^{-1}\frac{4x}{5}$ $y' = -\dfrac{1}{\frac{4x}{5}\sqrt{\left(\frac{4x}{5}\right)^2-1}}\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{4x}{5}\right)$ $y' = -\dfrac{1}{\frac{4x}{5}\sqrt{\frac{(4x)^2-5^2}{5^2}}}\left(\dfrac{4}{5}\right)$ $y' = -\dfrac{4}{\frac{4x}{5}\sqrt{(4x)^2-5^2}}$ $y' = -\dfrac{5}{x\sqrt{(4x)^2-5^2}}$	$y' = \dfrac{5x}{(x+25)(2x\sqrt{x})}$ 13.- $y = \csc^{-1}2x$ $y' = -\dfrac{1}{2x\sqrt{(2x)^2-1}}\dfrac{d}{dx}(2x)$ $y' = -\dfrac{1}{x\sqrt{(2x)^2-1}}$ DERIVADA DE FUNCIONES EXPONENCIALES. 1.-$y = e^{-\frac{x^2}{2}}$ $y' = e^{-\frac{x^2}{2}}\dfrac{d}{dx}\left(-\dfrac{x^2}{2}\right)$ $y' = e^{-\frac{x^2}{2}}\left(\dfrac{4x}{4}\right)$ $y' = -xe^{-\frac{x^2}{2}}$ 2.-$y = e^{tan\frac{4}{x}}$ $y' = e^{tan\frac{4}{x}}\dfrac{d}{dx}\left(tan\,\dfrac{4}{x}\right)$ $y' = e^{tan\frac{4}{x}}\left(-\dfrac{4}{x^2}\right)\left(sec^2\dfrac{4}{x}\right)$ 3.-$y = 10^{x^2+5x-6}$ $y' = 10^{(x^2+5x-6)}ln10\,\dfrac{d}{dx}(x^2+5x-6)$ $y' = 10^{(x^2+5x-6)}ln10(2x+5)$ 4.-$y = a^{cosx}$ $y' = -a^{cosx}senxlna$

2.-$y = x ln\left(\frac{x}{3}\right)$ $y' = x\left(\frac{1}{x}\right) + ln\left(\frac{x}{3}\right)$ $y' = 1 + ln\left(\frac{x}{3}\right)$	DERIVADA DE FUNCIONES LOGARITMICAS. 1.-$y = ln\sqrt{x}$ $y' = \frac{1}{\sqrt{x}}\frac{d}{dx}(\sqrt{x})$ $y' = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $y' = \frac{1}{2x}$ 3.-$y = log\frac{3}{x}$ $y' = \frac{1}{\frac{3}{x}ln10} \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{3}{x}\right)$ $y' = \frac{1}{\frac{3}{x}ln10} \cdot \left(-\frac{3}{x^2}\right)$ $y' = \frac{1}{ln10} \cdot \left(-\frac{1}{x}\right)$ $y' = -\frac{1}{xln10}.$

EJERCICIOS:

Derivar las siguientes funciones.

1.-$y = \frac{1}{2}sen^2x$ $\qquad y' = senxcosx$

2.-$y = (1 + COS3x^2)^4$ $\qquad y' = -24xsen3x^2(1 + cos3x^2)^3$

3.-$y = \frac{senx}{5-3cosx}$ $\qquad y' = \frac{5cosx-3}{(5-3cosx)^2}$

4.-$y = tan2x - tan^2x$ $\qquad y' = 2sec^22x - 2tanxsec^2x$

5.-$y = \frac{1-cosx}{senx}$ $\qquad y' = \frac{1-cosx}{sen^2x}$

6.-$y = \sqrt[5]{tan3x}$ $\qquad y' = \frac{sec^23x}{\sqrt[5]{(tan3x)^2}}$

7.-$y = senx(2sec^4x + 3sec^2x)$ $\qquad y' = 8sec^5x - 3secx$

8.-$y = csc\frac{1}{1-x}$ $\qquad$ $y' = -\frac{1}{(1-x)^2} csc\frac{1}{1-x} cot\frac{1}{1-x}$

9.-$y = arc\ sen5x$ $\qquad$ $y' = \frac{5}{\sqrt{1-25x^2}}$

10.-$y = arc\ cos\sqrt{x}$ $\qquad$ $y' = -\frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$

11.-$y = arc\ tan\frac{2-x}{3}$ $\qquad$ $y' = \frac{3}{13-4x+x^2}$

12.-$y = arc\ cot\sqrt{x^2+2x}$

13.-$y = arc\ sece^{2x}$ $\qquad$ $y' = \frac{2}{\sqrt{e^{4x}-1}}$

14.-$y = e^{-\frac{3}{x}}$ $\qquad$ $y' = \frac{3e^{-\frac{3}{x}}}{x^2}$

15.-$y = 2^{3x}$ $\qquad$ $y' = (3ln2)2^{3x}$

16.-$y = \log_{10} cosx$ $\qquad$ $y' = -\frac{tanx}{ln10}$

17.-$y = \log_2\frac{x^2}{x-1}$ $\qquad$ $y' = \frac{x-2}{(ln2)x(x-1)}$

18.-$y = \frac{10\log_4 t}{t}$ $\qquad$ $y' = \frac{5}{(ln2)t^2}(1-lnt)$

19.-$y = ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$ $\qquad$ $y' = -\frac{2}{x^2-1}$

20.-$y = ln^3(x-3)$ $\qquad$ $y' = \frac{3ln^2(x+3)}{x+3}$

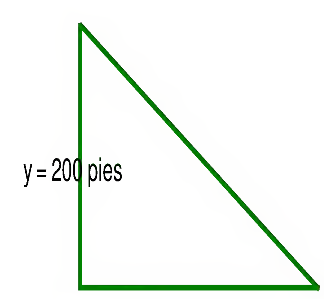
RAP 2:

RESUELVE PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN CON FUNCIONES TRASCENDENTES, EN SITUACIONES ACADÉMICAS

Problemas: Derivadas Inversas

Un hombre parado en la cima de un acantilado vertical está a 200 pies encima de un lago. Observa un bote de motor que se aleja directamente del pie del acantilado a razón de 25 pies por segundo. ¿Qué tan rápido cambia el ángulo de depresión de su línea visual cuando el bote está a 150 pies de la base del acantilado

a) Comprensión



Datos

$\frac{dx}{dt} = 25\ \frac{pies}{seg}$

X = 150 y=200 pies

$\frac{d\theta}{dt} = ?$

b) Planteamiento

$tan\theta = \frac{200}{x}$

Despejando θ

$\theta = tan^{-1}\frac{200}{x}$

Derivando

$\frac{d}{dt}(\theta) = \frac{d}{dt}(arctan\frac{200}{x})$

c) Resultado

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{1+(\frac{200}{x})^2} \cdot \frac{d}{dx}(\frac{200}{x}) \cdot \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{1+\frac{40000}{x^2}}(-\frac{200}{x^2})\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{x^2}{x^2+40000}(-\frac{200}{x^2})\frac{dx}{dt}$$

Sustituyendo

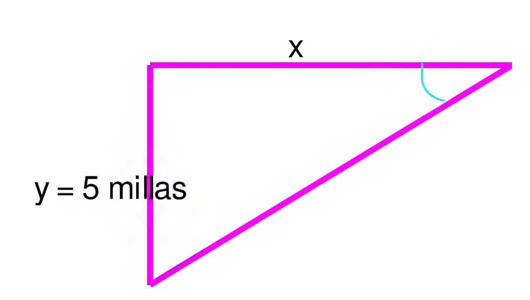
X= 150 y $\frac{dx}{dt} = 25\ \frac{pies}{seg}$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{150^2}{150^2 + 40000}\left(-\frac{200}{150^2}\right)(25)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = -0.08\ \frac{rad}{seg}$$

Un avión vuela a 5millas de altitud hacia un punto situado sobre un observador a una velocidad de 600 millas/hora. Calcular el ritmo al que está cambiando el ángulo de elevación θ para $\theta = 30°$

a) Comprensión



Datos

$$\frac{dx}{dt} = 600\frac{millas}{hora}$$

y= 5millas

$$\theta = 30°$$

$$\frac{d\theta}{dt} = ?$$

b) Planteamiento

$$tan\theta = \frac{5}{x}$$

Despejando θ

$$\theta = tan^{-1}\frac{5}{x}$$

Derivando

$$\frac{d}{dt}(\theta) = \frac{d}{dt}(arctan\frac{5}{x})$$

c) Resultados

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{1 + (\frac{5}{x})^2} \cdot \frac{d}{dx}(\frac{5}{x}) \cdot \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{1 + \frac{25}{2}}(\frac{-5}{x^2})\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{5}{x^2 + 25} \cdot \frac{dx}{dt}$$

Sustituyendo, x=$\frac{5}{tan\theta}$

$$\frac{dx}{dt} = 600\frac{millas}{hora}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{5}{\left(\frac{5}{tan\theta}\right)^2 + 25}(600)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = 30\frac{rad}{hora}$$

Resolver los siguientes problemas

1. Un avión vuela a 6millas de altitud hacia un punto situado sobre un observador a una velocidad de 600 millas por hora. Calcular el ritmo al que está cambiando el ángulo de elevación θ para $\theta = 60°\ y\ \theta$ = 75°
2. Un pescador recoge el hilo del carrete a razón de 1pie por segundo desde un puente de 15 pies de altura sobre el agua. ¿A qué ritmo está cambiando el ángulo entre el hilo y el agua cuando hay 25 pies de hilo fuera del agua?
3. Estas grabando un video de una carrera desde un lugar que está a 40 metros de la pista y sigues a un auto que se mueve a290 km/hr. ¿Con qué rapidez cambiará el ángulo θ de tu cámara cuando el auto está exactamente frente a ti?
4. Un papalote a 120 pies de altura se mueve horizontalmente y el hilo se mueve a 10 pies/seg. ¿A qué velocidad está disminuyendo la inclinación de su hilo respecto de la horizontal cuando hay 240 pies de hilo suelto?

Referencias Documentales

No.	Título del Documento	Autor(es)	Editorial y Año
1	Cálculo Diferencial e Integral	Larson, H. E.	Mc Graw Hill 2005
2	Cálculo con Geometría Analítica	Purcell, E. J.	Limusa 2004
3	Cálculo	Stewart, J.	Thompson 2008
4	El Cálculo	Leithold, L.	Oxford 2007
5	Cálculo Diferencial e Integral	Granville, WW. A.	Limusa 2004
6	Cálculo Diferencial e Integral	Taylor, H. E.	Limusa 2004
7	Cálculo Diferencial	Cuellar, J. A.	Mc Graw Hill 2008

Páginas Electrónicas

Dirección Electrónica	Contenido Principal	Clasificación
http.//www.weneslao.com.mx/matematicas/math4/	Texto	Consulta
http://umay.edu.mx/	Texto	Consulta
http://www.biopsychology.org/apuntes/calculo/calculo1.htm	Texto	Consulta
http://es.wikipedia.org/wihl/C%c3%A1lcalculo_diferencial	Texto	Consulta
http://dieumsnh.qfb.umich.mx/DIFERENCIAL/diferencial.htm	Texto	Consulta
http://platea.pntic.mec.es/jescuder/calcdif.htm	Texto	Consulta
http://docentes.uacj.mx/sterraza/matematicas_en_movimiento/mathematica.htmk	Texto	Consulta